Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 273 a 274 můžete zaslat nejpozději do 31. 3. 2022 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz.

Úloha 273

Určete všechny mnohočleny $P(x)$ s celočíselnými koeficienty takové, že pro všechna přirozená čísla a, b je číslo $P(a) + P(b)$ dělitelné číslem $a + b$.

Ján Mazák

Úloha 274

Do dvou krabic rozmístíme n černých a n bílých koulí tak, že každá z nich obsahuje alespoň jednu kouli. S pravděpodobností $\frac{1}{2}$ vybereme jednu z krabic a z ní vytáhneme jednu kouli (v každé krabici je vytažení v ní obsažené koule stejně pravděpodobné). Při jakém rozmístění koulí bude pravděpodobnost vytažení bílé koule

a) co největší;

b) co nejmenší.

Józef Kalinowski (Kalety)

Dále uvádíme řešení úloh 269 a 270, jejichž zadání jsme zveřejnili ve druhém čísle aktuálního (30.) ročníku našeho časopisu.

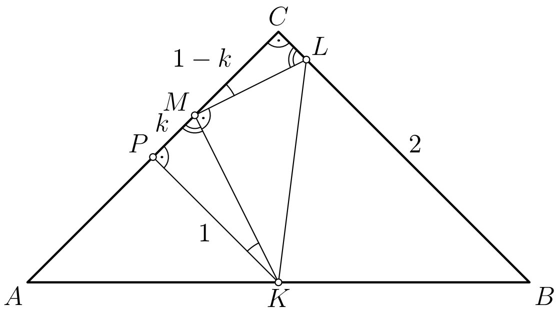
Úloha 269

Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC, v němž K je střed jeho přepony AB. Uvažujme pravoúhlý trojúhelník KLM s pravým úhlem při vrcholu M, kde vrcholy L, M leží po řadě uvnitř odvěsen BC, AC. Sestrojte bod L tak, aby úsečka BL měla co nejmenší délku.

Jaroslav Švrček

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že odvěsny pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC mají délku 2. Označme P střed odvěsny AC. Úsečka PK je střední příčkou trojúhelníku ABC, má tak délku 1 a je kolmá na odvěsnu AC. Aby bod L byl vnitřním bodem odvěsny BC, musí bod M být zřejmě vnitřním bodem úsečky PC. Trojúhelníky KMP

a MLC jsou pravoúhlé s pravými úhly při vrcholech po řadě P, C a součet jejich vnitřních úhlů při vrcholu M je 90°. Tedy podle věty *uu* jsou podobné. Označme k délku úsečky PM. Protože bod P je středem odvěsny AC s délkou 2, je délka úsečky CM rovna $1 - k$.



Z podobnosti trojúhelníků KMP a MLC plyne

$$\frac{|CL|}{1-k} = \frac{|CL|}{|CM|} = \frac{|PM|}{|PK|} = \frac{k}{1}.$$

Odtud dostaneme

$$|CL| = k - k^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - k\right)^2.$$

Úsečka BL bude mít nejmenší délku, právě když úsečka CL bude nejdelší. Z nezápornosti druhé mocniny plyne

$$|CL| \leq \frac{1}{4},$$

kde rovnost nastane, právě když $k = \frac{1}{2}$, tedy právě když bod M je středem úsečky PC.

Úsečka BL tak bude mít nejmenší délku pro vnitřní bod L odvěsny BC takový, že

$$|BL| = |BC| - |CL| = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = \frac{7}{8}|BC|,$$

jehož konstrukce je zřejmá.

Poznámka. Pro hledaný bod L v trojúhelníku CLM platí

$$|CM| = \frac{1}{2}, \quad |CL| = \frac{1}{4} \quad \text{a} \quad |LM| = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

V trojúhelníku KLM dopočítáme

$$|KM| = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad |LM| = \frac{\sqrt{5}}{4}, \quad \text{a} \quad |LK| = \frac{5}{4}.$$

Trojúhelníky KLM a MLC jsou tak podobné s poměrem podobnosti $\sqrt{5} : 1$, tedy jejich vnitřní úhly po řadě u vrcholů M a K jsou shodné. Podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu je v tomto případě přímka AC tečnou kružnice s průměrem KL (opsané trojúhelníku KLM). Někteří řešitelé pomocí této vlastnosti charakterizovali bod L a popsali jeho konstrukci.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců, *Anton Hnáth* z Moravan, *Petr Vach* z Jablonce nad Nisou, *Michal Beránek* z G v Praze 10, Voděradská, *Veronika Borková* z GVM v Novém Městě na Moravě, *Tomáš Flídr* z G v Kojetíně, *Martin Fof* z MG v Opavě, *Jiří Harvalík* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Hynek Jakeš* ze SG v Olomouci, *Zdeněk Pezlar* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Piotr Kulisz* ze ZSOT v Lublinci (Polsko), *Adam Mendl* z GPdC v Táboře, *Ladislav Nagy* z G v Českých Budějovicích, Jírovcova, *Michal Janík* a *Samuel Rosiar*, oba z GJK v Praze 6, *Ondřej Trinkewitz* z G a SPŠE ve Frenštátě pod Radhoštěm a *Kristýna Zemene* z G a ZUŠ ve Šlapanicích.

Úloha 270

Uvažujme čísla $a = 2\cos(\pi/7)$, $b = 2\cos(3\pi/7)$ a $c = 2\cos(5\pi/7)$. Dokažte, že tři výrazy $a+b+c$, $1/a+1/b+1/c$, abc nabývají celočíselných hodnot.

Pavel Calábek

Řešení. Podle Moivreovy věty pro čísla $t \in \{\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}\}$ platí

$$(\cos t + \mathrm{i}\sin t)^7 = \cos 7t + \mathrm{i}\sin 7t = -1. \tag{1}$$

Pro tato čísla t je i reálná část výrazu na levé straně rovna -1, užitím binomické věty tak dostaneme

$$\begin{aligned} -1 &= \cos^7 t - 21\cos^5 t\sin^2 t + 35\cos^3 t\sin^4 t - 7\cos t\sin^6 t = \\ &= \cos^7 t - 21\cos^5 t\,(1-\cos^2 t) + \\ &\quad + 35\cos^3 t\,(1-\cos^2 t)^2 - 7\cos t\,(1-\cos^2 t)^3 = \\ &= 64\cos^7 t - 112\cos^5 t + 56\cos^3 t - 7\cos t. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že čísla z množiny $\{\cos\frac{\pi}{7}, \cos\frac{3\pi}{7}, \cos\frac{5\pi}{7}\}$ jsou kořeny rovnice

$$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x + 1 = 0. \tag{2}$$

Z rozkladu

$$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x + 1 = (x+1)\big((2x)^3 - (2x)^2 - 2\,(2x) + 1\big)^2 \tag{3}$$

a z faktu, že čísla z množiny $\{\cos\frac{\pi}{7}, \cos\frac{3\pi}{7}, \cos\frac{5\pi}{7}\} = \{\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\}$ jsou zřejmě navzájem různá a navíc jsou různá i od čísla -1, plyne, že čísla a, b, c jsou tři různé kořeny kubické rovnice

$$y^3 - y^2 - 2y + 1 = 0. \tag{4}$$

Užitím Viètových vztahů dostaneme

$$a + b + c = 1, \quad ab + bc + ca = -2 \quad \text{a} \quad abc = -1.$$

Ze druhé a třetí rovnosti navíc získáme

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + cz}{abc} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Proto $a + b + c = 1$, $1/a + 1/b + 1/c = 2$ a $abc = -1$, což jsou vesměs celá čísla.

Poznámka 1. Rovnost (1) platí také pro čísla $t \in \{\frac{7\pi}{7}, \frac{9\pi}{7}, \frac{11\pi}{7}, \frac{13\pi}{7}\}$. Protože ze známých vzorců pro kosinus plyne

$$\cos\tfrac{7\pi}{7} = -1,\ \cos\tfrac{9\pi}{7} = \cos\tfrac{-5\pi}{7} = \cos\tfrac{5\pi}{7},\ \cos\tfrac{11\pi}{7} = \cos\tfrac{3\pi}{7},\ \cos\tfrac{13\pi}{7} = \cos\tfrac{\pi}{7},$$

dá se očekávat, že rovnice (2) bude mít kořen -1 a její zbývající kořeny budou dvojnásobné, tedy se dá očekávat existence rozkladu (3) ve tvaru součinu $x + 1$ a druhé mocniny kubického čtyřčlenu.

Poznámka 2. V předloženém řešení se uvažuje reálná část výrazu (1). Pokud budeme uvažovat její imaginární část, dojde ke komplikacím, které vyžadují podrobnější diskusi. Imaginární část levé strany výrazu (1) je rovna nule. Po vydělením nenulovým číslem $\sin t$ dostaneme podobně jako v předloženém řešení rovnici

$$\begin{aligned} 0 &= 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1 = \\ &= \big((2x)^3 - (2x)^2 - 2(2x) + 1\big)\big((2x)^3 + (2x)^2 - 2(2x) - 1\big), \end{aligned}$$

která má nejen kořeny z množiny $\{\cos\frac{\pi}{7}, \cos\frac{3\pi}{7}, \cos\frac{5\pi}{7}\} = \{\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\}$, ale též (podobnou úvahou jako v poznámce 1) z množiny $\{\cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}\} = \{-\frac{c}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{a}{2}\}$. Čísla z množiny $\{a, b, c, -a, -b, -c\}$ jsou tak (navzájem různé) kořeny rovnice

$$(y^3 - y^2 - 2y + 1)(y^3 + y^2 - 2y - 1) = 0.$$

Každý z činitelů na levé straně má právě tři kořeny z této množiny. Snadno nahlédneme, že žádný z nich nemá jako své kořeny dvojici opačných čísel. Jelikož koeficient u y je v obou činitelích záporný, musí mít každý z činitelů aspoň jeden záporný kořen. Jeden z činitelů tak má dva kladné a jeden záporný kořen a druhý naopak jeden kladný a dva záporné kořeny. Úvahou o absolutním členu zjistíme, že dva kladné a jeden záporný kořen má rovnice

$$y^3 - y^2 - 2y + 1 = 0.$$

Protože koeficient u y^2 je -1, znamená to, že součet těchto kořenů je 1. Užitím zřejmé nerovnosti $2 > a > 1{,}5 > -c > 1 > b > 0$ zjistíme, že může mít jako kladné kořeny pouze a a b, a tedy záporný kořen c. Tím jsme jiným způsobem dokázali, že rovnice (4) ná kořeny a, b, c.

Jiné řešení (*podle Samuela Rosiara*). Uvažujeme komplexní číslo

$$u = \cos\tfrac{\pi}{7} + \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{7}.$$

Potom

$$u^{-1} = \cos\left(-\tfrac{\pi}{7}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\tfrac{\pi}{7}\right) = \cos\tfrac{\pi}{7} - \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{7}.$$

Platí tedy $a = 2\cos\frac{\pi}{7} = u + u^{-1}$. Podobně také odvodíme $b = u^3 + u^{-3}$ a $c = u^5 + u^{-5}$. Navíc z Moivreovy věty dostaneme $u^7 = u^{-7} = -1$ a $u^{14} = u^{-14} = 1$. Platí tak

$$\begin{aligned} a + b + c = u + u^{-1} + u^3 + u^{-3} + u^5 + u^{-5} &= \\ &= u^{-5} \cdot \left(1 + u^2 + u^4 + u^6 + u^8 + u^{10}\right) = \\ &= u^{-5} \cdot \frac{1 - u^{12}}{1 - u^2} = u^{-7} \cdot \frac{u^2 - u^{14}}{1 - u^2} = (-1) \cdot \frac{u^2 - 1}{1 - u^2} = 1, \end{aligned}$$

což je celé číslo. Podobně užitím identit $u^9 = u^{14}u^{-5} = u^{-5}$ a $u^{-9} = u^5$

dostaneme

$$\begin{aligned}abc &= (u+u^{-1})(u^3+u^{-3})(u^5+u^{-5}) = \\ &= u^9+u^7+u^3+u+u^{-1}+u^{-3}+u^{-7}+u^{-9} = \\ &= u^{-5}-1+u^3+u+u^{-1}+u^{-3}-1+u^5 = a+b+c-2 = -1,\end{aligned}$$

což je opět celé číslo. Konečně

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = \\ &= -\big((u+u^{-1})(u^3+u^{-3})+(u+u^{-1})(u^5+u^{-5})+(u^3+u^{-3})(u^5+u^{-5})\big) = \\ &\qquad = 2-(u^8+u^6+u^4+u^2+1+u^{-2}+u^{-4}+u^{-6}+u^{-8})- \\ &\qquad\qquad -(u^4+u^2+1+u^{-2}+u^{-4}) = \\ &= 2-u^{-8}\cdot\frac{1-u^{18}}{1-u^2}-u^{-4}\cdot\frac{1-u^{10}}{1-u^2} = 2-\frac{u^{-8}-u^{10}+u^{-4}-u^6}{1-u^2} = \\ &\qquad = 2-\frac{-u^{-1}+u^3-u^3+u^{-1}}{1-u^2} = 2,\end{aligned}$$

což je také celé číslo

Poznámka 3. Řešení *Zdenka Pezlara* je směsí předcházejících dvou řešení. Úpravami podobnými jako v tomto řešení ukázal, že čísla $a = u+u^{-1}$, $b = u^3+u^{-3}$ a $c = u^5+u^{-5}$ jsou kořeny rovnice (4) a dále pokračoval stejně jako v prvním řešení.

Jiné řešení (*podle Piotra Kulisze*). Úlohu lze také řešit užitím řady součtových vzorců pro funkce sinus, kosinus a vztahy mezi nimi. Tyto vzorce můžete nalézt v každém přehledu vlastností goniometrických funkcí. Jejich užitím platí

$$\begin{aligned}a+b+c &= 2\cos\tfrac{\pi}{7}+2\cos\tfrac{3\pi}{7}+2\cos\tfrac{5\pi}{7} = \\ &= \frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} = \\ &= \frac{\sin\frac{2\pi}{7}+(\sin\frac{-2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7})+(\sin\frac{-4\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7})}{\sin\frac{\pi}{7}} = \\ &= \frac{\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} = 1,\end{aligned}$$

což je celé číslo. Dále máme

$$\begin{aligned}
abc &= 2\cos\tfrac{\pi}{7}\cdot 2\cos\tfrac{3\pi}{7}\cdot 2\cos\tfrac{5\pi}{7} = 8\cos\tfrac{\pi}{7}(-\cos\tfrac{4\pi}{7})(-\cos\tfrac{2\pi}{7}) = \\
&= 4\cdot\frac{2\sin\tfrac{\pi}{7}\cos\tfrac{\pi}{7}\cdot\cos\tfrac{2\pi}{7}\cos\tfrac{4\pi}{7}}{\sin\tfrac{\pi}{7}} = 2\cdot\frac{2\sin\tfrac{2\pi}{7}\cos\tfrac{2\pi}{7}\cdot\cos\tfrac{4\pi}{7}}{\sin\tfrac{\pi}{7}} = \\
&= \frac{2\sin\tfrac{4\pi}{7}\cos\tfrac{4\pi}{7}}{\sin\tfrac{\pi}{7}} = \frac{\sin\tfrac{8\pi}{7}}{\sin\tfrac{\pi}{7}} = \frac{-\sin\tfrac{\pi}{7}}{\sin\tfrac{\pi}{7}} = -1,
\end{aligned}$$

což je opět celé číslo. Nyní

$$\begin{aligned}
ab &= 2\cos\tfrac{\pi}{7}\cdot 2\cos\tfrac{3\pi}{7} = 2\left(\cos\tfrac{-2\pi}{7} + \cos\tfrac{4\pi}{7}\right) = 2\left(-\cos\tfrac{5\pi}{7} - \cos\tfrac{3\pi}{7}\right),\\
bc &= 2\cos\tfrac{3\pi}{7}\cdot 2\cos\tfrac{5\pi}{7} = 2\left(\cos\tfrac{-2\pi}{7} + \cos\tfrac{8\pi}{7}\right) = 2\left(-\cos\tfrac{5\pi}{7} - \cos\tfrac{\pi}{7}\right),\\
ca &= 2\cos\tfrac{5\pi}{7}\cdot 2\cos\tfrac{\pi}{7} = 2\left(\cos\tfrac{4\pi}{7} + \cos\tfrac{6\pi}{7}\right) = 2\left(-\cos\tfrac{3\pi}{7} - \cos\tfrac{\pi}{7}\right).
\end{aligned}$$

Užitím těchto vztahů a již vypočtených

$$abc = -1, \quad a + b + c = 1$$

dostaneme

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ca}{abc} = -ab - bc - ca = \\
&\quad = 2\left(\cos\tfrac{5\pi}{7} + \cos\tfrac{3\pi}{7}\right) + 2\left(\cos\tfrac{5\pi}{7} + \cos\tfrac{\pi}{7}\right) + 2\left(\cos\tfrac{3\pi}{7} + \cos\tfrac{\pi}{7}\right) = \\
&\qquad = 2\left(2\cos\tfrac{\pi}{7} + 2\cos\tfrac{3\pi}{7} + 2\cos\tfrac{5\pi}{7}\right) = 2(a + b + c) = 2,
\end{aligned}$$

což je konečně také celé číslo.

Správná řešení zaslali *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jiří Harvalík* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Hynek Jakeš* ze SG v Olomouci, *Zdeněk Pezlar* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Piotr Kulisz* ze ZSOT v Lublinci (Polsko), *Michal Janík* a *Samuel Rosiar*, oba z GJK v Praze 6,

Pavel Calábek