

Odpor cívky zanedbejte II

OLDŘICH LEPIL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Před 25 lety vyšel v MFI příspěvek [1], který se zamýšlí nad tím, že při řešení fyzikálních úloh často zjednodušujeme podmínky průběhu fyzikálního děje, aby řešení bylo dostupné i s použitím méně náročných matematických postupů. Nejčastěji je to při řešení úloh z mechaniky, kde zanedbáváme zejména působení odporových sil. Tak je tomu třeba u volného pádu těles, kde neuvažujeme odpor prostředí, nebo v úlohách o pohybu těles, kde neuvažujeme síly tření. Méně pozornosti je této problematice věnováno v úlohách z elektřiny, kde zanedbáním některých parametrů obvodových prvků se snadno dostáváme za hranice reality. Jestliže je důvodem těchto zjednodušení náročnost matematického řešení takových úloh, pak využití prostředků IT nám mnohé usnadňuje a přibližuje řešení úloh realitě poměrně jednoduchými postupy.

Tím se zabýval citovaný příspěvek [1], který ukázal několik možností řešení úloh s elektrickými obvody obsahujícími cívku o indukčnosti L a odporu R . K řešení úloh byl použit dnes už trochu zapomenutý program FAMULUS, který byl ve své době téměř revolucí v didaktickém využití IT. Tento příspěvek lze tedy považovat za jakýsi „upgrade“ postupů v příspěvku [1] s tím, že je využit všeobecně dostupnější program MS Excel a k příspěvku je přiložen sešit s řešením úloh, kde si zájemce může ověřit, jak vlastnosti cívky, její indukčnost a rezistance ovlivňují děje v elektrickém obvodu.

Uvedeme jako příklad čtyři charakteristické úlohy, které jsou také v učebnici Elektřina a magnetismus [2], popř. ve Sbírce úloh [3] a posoudíme vliv idealizace vlastností cívky na jejich řešení. Sešit s řešením úloh je dostupný z <http://mfi.upol.cz/files/30/3004/civka.xlsx>.

Úloha 1

Cívku o indukčnosti $L = 1 \text{ H}$ v určitém okamžiku ($t_0 = 0$) připojíme ke zdroji napětí $U = 10 \text{ V}$. a) Určete proud procházející cívku v čase $t = 0,5 \text{ s}$. Odpor cívky i vnitřní odpor zdroje napětí zanedbejte. b) Určete proud, který cívku prochází ve stejném okamžiku v případě, že její odpor je $R = 2 \Omega$.

Řešení

Od okamžiku připojení cívky ke zdroji napětí je na svorkách cívky trvale svorkové napětí zdroje ($U = u_L$), takže ve smyslu úvah v příspěvku [4] napíšeme 2. Kirchhoffův zákon pro tento obvod ve tvaru

$$U = L \frac{di}{dt}. \quad (1)$$

Odtud vyplývá, že v čase t bude cívku procházet proud

$$I = \int \frac{U}{L} dt = \frac{U}{L} t + \text{konst.},$$

kde $\text{konst.} = I_0$, tj. proud v počátečním okamžiku. V našem případě je $I_0 = 0$. Dospěli jsme ke zjištění, že v tomto idealizovaném případě je proud procházející cívku lineární funkcí času a poněvadž neuvažujeme ani vnitřní odpor zdroje, měl by se proud v obvodu lineárně a bez omezení zvětšovat. Na první pohled je patrné, že tato situace odporuje realitě.

U skutečné cívky však tato situace nenastane, poněvadž její odpor, popř. i odpor zdroje zanedbat nemůžeme. Řešená úloha se tak mění ve známý případ přechodného děje v sériovém obvodu RL (viz např. CD k učebnici [2], R6.3, s. 75) a 2. Kirchhoffův zákon pro tento obvod vyjadřuje vztah

$$U = L \frac{di}{dt} + Ri. \quad (2)$$

Je to diferenciální rovnice, jejíž řešení uvádí každá vysokoškolská učebnice elektromagnetismu (a je také v učebnici [2] na CD ve Slovníčku pojmů, s. 42). Pro výpočet proudu v cívce v čase t

$$i = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-t/\tau} \right), \quad (3)$$

kde $\tau = L/R$ je časová konstanta obvodu.

Nesnáz s diferenciální rovnicí na střední škole velmi snadno překonáme vytvořením jednoduchého a pro středoškoláka dostatečně názorného počítačového modelu. Z rovnice (2) vyjádříme změnu proudu di v obvodu za dobu dt , která má v počítačovém modelu význam časového kroku. Čím menší je časový krok, tím přesnější je řešení úlohy.

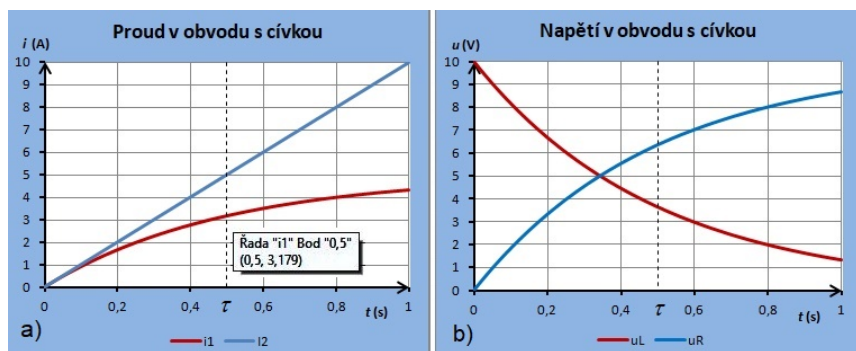
Celý počítačový model tvoří následující cyklus (viz příložený model CVK1):

$$di = (U - R \cdot i) / L \cdot dt$$

$$i = i + di$$

$$t = t + dt$$

Pro hodnoty napětí zdroje a indukčnosti cívky uvedené v zadání úlohy dostaneme s použitím časového kroku $dt = 0,01$ s řešení, jehož grafické vyjádření je na obr. 1a. Pro část úlohy b) bychom výpočtem zjistili, že v čase $t = 0,5$ s má proud v cívice hodnotu $i_\tau \doteq 3,2$ A, což je v souladu s výpočtem pomocí počítačového modelu ($i_\tau = 3,179$ A $\doteq 3,2$ A). Současně můžeme ověřit teoretický poznatek, že pro okamžité napětí na cívice u_L a napětí na rezistanci u_R v čase odpovídajícím časové konstantě $\tau = L/R = 0,5$ s platí $u_L = 0,37U \doteq 3,7$ V a $u_R = 0,63U \doteq 6,3$ V (obr. 1b).



Obr. 1

Úloha 2 ([2], Teoretická cvičení na CD, s. 27, příklad 3, upraveno)

Cívka o indukčnosti 0,5 H je připojena ke zdroji stejnosměrného napětí 3,0 V. Odpor R vinutí cívky i vnitřní odpor R_i zdroje je velmi malý. a) Určete dobu, za kterou proud v cívice po jejím připojení ke zdroji vzroste o 2,4 A. b) Určete velikost napětí na cívice a proud v obvodu ve stejném okamžiku, jestliže zdroj napětí má vnitřní odpor 0,5 Ω .

Řešení

Po připojení cívky ke zdroji napětí se proud začne zvětšovat z hodnoty $i_0 = 0$ na hodnotu $i = 2,4$ A, takže $\Delta i = i - i_0 = 2,4$ A. V předcházející úloze jsme ukázali, že při zanedbatelném odporu ($R + R_i \approx 0$) bude po připojení cívky ke zdroji napětí proud v obvodu narůstat rovnoměrně. Vztah pro napětí na cívce pak můžeme napsat v diferenciálním tvaru

$$U = L \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

a řešení části a) úlohy bude jednoduché

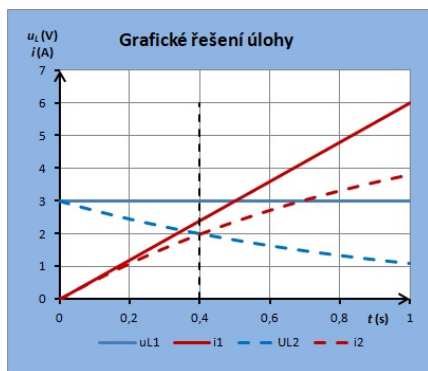
$$\Delta t = \frac{L \Delta i}{U} \approx \frac{0,5 \cdot 2,4}{3,0} \text{ s} = 0,4 \text{ s.}$$

V části b) úlohy však tento postup použít nemůžeme a východiskem řešení je opět 2. Kirchhoffův zákon vyjádřený diferenciální rovnicí (2). Výsledek najdeme pomocí modelu (CVK2) a v grafické podobě je na obr. 2. Pro srovnání určíme napětí numericky pomocí vztahu (3). Vzhledem k časové konstantě obvodu $\tau = L/R = 1$ s dostaneme

$$i = \frac{U}{R_i} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \frac{3}{0,5} \left(1 - e^{-0,4}\right) \doteq 2,0 \text{ A}$$

a napětí na cívce

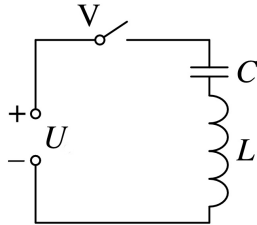
$$u_L = U - R_i i \doteq 2,0 \text{ V.}$$



Obr. 2

Úloha 3 ([3], s. 181, úloha 5.409)

V obvodu na obr. 3 sepneme vypínač V. Určete největší proud v obvodu a největší napětí na kondenzátoru.



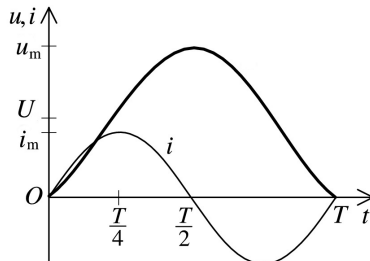
Obr. 3

Řešení

Úlohy tohoto typu se zpravidla řeší na základě zákona zachování energie a rovněž řešení úlohy v [3] vychází ze vztahu

$$\frac{Li^2}{2} + \frac{Cu^2}{2} = qU = CuU, \quad (4)$$

kde i je okamžitá hodnota proudu v obvodu, u je okamžitá hodnota napětí na kondenzátoru a q je okamžitá hodnota náboje na deskách kondenzátoru. V okamžiku, kdy proud dosáhne největší hodnoty, bude $di/dt = 0$, napětí na cívce bude mít nulovou hodnotu a napětí na kondenzátoru bude rovno napětí zdroje ($u = U$). Z rovnice (4) pro největší proud vychází $i_m = U\sqrt{C/L}$. Nabíjení kondenzátoru však pokračuje při zmenšujícím se proudu a napětí na kondenzátoru dosáhne největší hodnoty při $i = 0$, kdy $u_m = 2U$. Obecné řešení úlohy zobrazuje graf na obr. 4.



Obr. 4

Ke stejnému výsledku nás dovede jednoduchou cestou i počítačový model CVK3, kterým se řeší přechodný děj v sériovém obvodu LC . Poněvadž neuvažujeme odpor cívky, vyjadřuje 2. Kirchhoffův zákon pro tento obvod diferenciální rovnice

$$U = L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}, \tag{5}$$

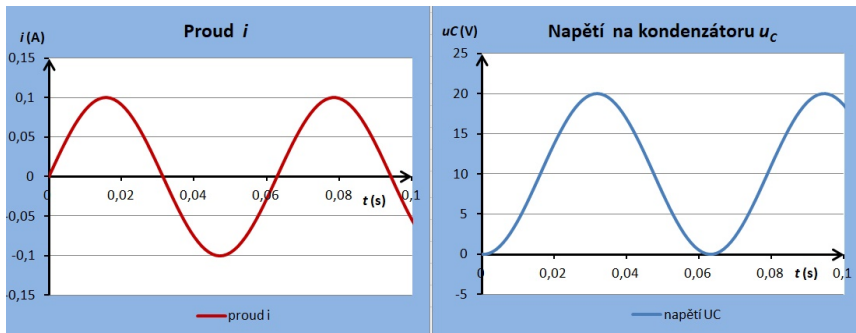
a pro změnu proudu v obvodu platí

$$di = \frac{U - \frac{q}{C}}{L} dt.$$

Při přechodném ději se ovšem mění také náboj kondenzátoru. Poněvadž okamžitá hodnota proudu v obvodu je vyjádřena vztahem $i = dq/dt$, upravíme počítačový model do následující podoby:

$$\begin{aligned} q &= q + i \cdot dt \\ di &= (U - q/C) / L \cdot dt \\ i &= i + di \\ t &= t + dt \end{aligned}$$

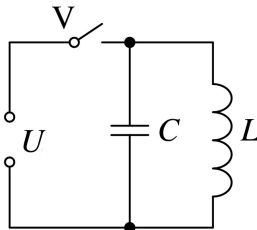
Při výpočtu použijeme hodnoty z úlohy 1 ($U = 10 \text{ V}$; $L = 1 \text{ H}$), které doplníme o kapacitu kondenzátoru $C = 100 \mu\text{F}$. Řešením získáme časové diagramy na obr. 5. Z grafů odečteme $i_m = 0,1 \text{ A}$ a $u_m = 20 \text{ V}$. Změnou parametrů si můžeme ověřit jejich vliv na průběh děje v obvodu. Děj probíhá s periodou $T = 2\pi\sqrt{LC} \doteq 0,063 \text{ s}$.



Obr. 5

Úloha 4 ([3], s. 182, úloha 5.410)

Ke zdroji stejnosměrného napětí 10 V je připojen oscilační obvod tvořený kondenzátorem o kapacitě $20 \mu\text{F}$ a cívkou o indukčnosti 20 mH (obr. 6). Při sepnutém vypínači prochází cívkou proud 2 A. Vypínač rozpojíme. Určete náboj kondenzátoru v okamžiku, kdy cívkou prochází proud 1 A. Ztráty vznikající přeměnou energie na vnitřní energii obvodu neuvažujte.



Obr. 6

Řešení

Úloha v podstatě představuje obrácený postup obvyklé demonstrace kmitání oscilačního obvodu LC . Při ní zpravidla nabijeme kondenzátor a pak ho připojíme k cívce. V praxi však můžeme použít také postup odpovídající obr. 6. To znamená, že cívkou prochází proud, který v počátečním okamžiku přerušíme. To má za následek indukci napětí, které může být podstatně větší, než je napětí použitého zdroje. Požadované počáteční hodnoty proudu v cívce a tím i velikosti napětí v okamžiku přerušení proudu však dosáhneme jen použitím rezistoru zařazeného v přívodu k cívce (na obr. 6 není zakreslen). Praktické použití tohoto postupu k demonstraci kmitání obvodu LC je popsáno v [5].

Řešení v [3] opět vychází ze zákona zachování energie

$$\frac{Li_1^2}{2} + \frac{CU^2}{2} = \frac{Li_2^2}{2} + \frac{q^2}{2C}.$$

Odtud pro náboj kondenzátoru v okamžiku, kdy cívkou prochází proud i_2 , platí vztah

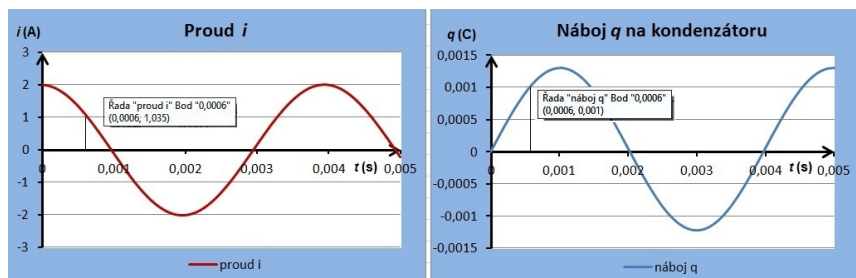
$$q = C\sqrt{U^2 + \frac{L(i_1^2 - i_2^2)}{C}} \doteq 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ C}.$$

Jednodušší řešení nám nabídne počítačový model CVK4, pro jehož vytvoření opět použijeme rovnici (5). V počátečním okamžiku cívkou pro-

chází proud $i_1 = 2 \text{ A}$ a na deskách kondenzátoru je vzhledem k zanedbatelnému odporu cívky napětí $u_0 = 0$, takže počáteční hodnota náboje $q_0 = C u_0 = 0$. Po rozpojení vypínače se proud v cívce začíná zmenšovat a kondenzátor se nabíjí indukovaným napětím. Z rovnice (5) vyjádříme změnu proudu di a v počítačovém modelu napíšeme:

$$di = -q / (L \cdot C) \cdot dt$$

Výsledný průběh časových změn náboje na kondenzátoru je na obr. 7 a z grafu popř. z tabulky odečteme řešení úlohy. Přesnost výsledku je dána volbou velikosti časového kroku. V sešitě CVK4 je také graf napětí na cívce a na kondenzátoru, z něhož je patrné značné zvětšení napětí při přerušení proudu.



Obr. 7

Dosud jsme stále pracovali s ideálním modelem obvodu bez ztrát. Jestliže budeme uvažovat odpor R cívky, musíme doplnit na pravé straně rovnice (5) člen $u_R = Ri$, úbytek napětí na rezistanci obvodu. 2. Kirchhoffův zákon vyjádříme rovnicí

$$U = L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri$$

a pro změnu proudu v počítačovém modelu dostaneme:

$$di = (U - q/C - R \cdot i) / L \cdot dt$$

Velikost odporu můžeme měnit posuvníkem a ověřit tak vliv odporu na průběh děje v obvodu, který má charakter tlumeného kmitání.

Literatura

- [1] *Lepil, O.*: Odpor cívky zanedbejte. Matematika, fyzika, informatika, roč. 5 (1996), č. 9, s. 476.
- [2] *Lepil, O., Šedivý, P.*: Fyzika pro gymnázia. Elektřina a magnetismus. 7. vydání, Prometheus, Praha, 2017. ISBN 978-80-7196-460-5
- [3] *Lepil, O., Bednařík, M., Šíroká, M.*: Fyzika. Sbírka úloh pro střední školy. 4. vydání, Prometheus, Praha, 2016.
- [4] *Lepil, O.*: Elektromagnetická indukce v obvodu s cívkou. Matematika, fyzika, informatika, roč. 27 (2018), č. 3, s. 197.
- [5] *Lepil, O., Látal, F.*: Experiment v učivu o kmitání elektromagnetického oscilátoru. Matematika, fyzika, informatika, roč. 22 (2013), č. 5, s. 344.

Úlohy rozvíjející dovednost identifikace a kontroly proměnných

EVA HEJNOVÁ

Přírodovědecká fakulta UJEP, Ústí nad Labem

Na začátku roku 2021 byla zveřejněna tzv. „malá revize“ Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání [1], která vedla k redukci vzdělávacího obsahu Člověk a příroda, konkrétně se tyto redukce ve větší míře dotkly i vzdělávacího oboru Fyzika [2]. Mezi kritérii, na základě kterých byly škrty provedeny, je uvedeno (mimo jiné) i kritérium „zjednodušení obsahu k podpoře hledání souvislostí“ [3], s. 2. Podobně Strategie 2030+ [4] deklaruje, že modernizací obsahu kurikula bude přenesen důraz od získávání poznatků k osvojování obecných principů myšlení.

Tyto obecné principy, označované také jako metakognitivní kompetence [5], lze dobře rozvíjet v rámci výuky přírodních věd, kde jsou obvykle označovány jako vědecké myšlení či uvažování. V našem příspěvku se úžeji zaměříme na jednu specifickou dovednost vědeckého myšlení, kterou je