INFORMATIKA

Několik informatických hádanek

PETR OSIČKA

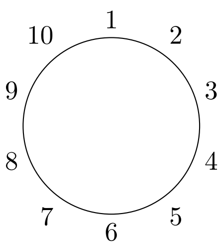
Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Hádanky jsou již dlouho součástí matematiky i informatiky. Některé z nich se již stali součástí folkloru dané oblasti, jiné se objevují při pracovních pohovorech (například v Google) či v odborných magazínech. Řešení hádanek je příjemnou zábavou, při které lze dobře procvičit myšlení, u hádanek informatických myšlení algoritmické.

1. Josefův problém

Hádanka je inspirována příhodou Josefa, starověkého židovského historika. Traduje se, že během židovsko-římských válek bylo 41 židovských rebelů skrývajících se v jeskyni obklíčeno římskými vojsky. Mezi rebely byl i Josef. Rebelové se rozhodli, že upřednostní sebevraždu před zajetím a že se postaví do kruhu a budou zabíjet každého třetího živého, dokud to bude možné. Josef byl jeden ze dvou přeživších, dokázal si totiž spočítat, kam se má postavit.

Pro jednoduchost předpokládejme, že začneme s čísly 1, 2, ..., n vepsanými po obvodu kruhu, půjdeme po směru hodinových ručiček a škrtneme každé druhé číslo, na které narazíme. Zřejmě nám na konci zůstane pouze jedno číslo. Například, pokud $n = 10$, dostaneme následující kruh:



V prvním kole škrtneme postupně 2, 4, 6, 8, 10. V dalším kole 3, 7 a nakonec 1, 9. Zůstane číslo 5. Úkolem je navrhnout postup (ideálně vzoreček), který pro n vrátí přeživší číslo.

Řešení

Postup, který si ukážeme, je založen na následujícím pozorování. Pokud se podíváme na čísla, která zůstanou po prvním kole, můžeme si všimnout, že opět dostáváme Josefův problém, pouze je nutné provést „přečíslování“. Navíc se počet osob, pro které problém řešíme, zmenší (zhruba) na polovinu. Můžeme tedy problém opakovaně zmenšovat až do triviální situace, kdy zůstane pouze jedno číslo. Ze způsobu přečíslování při každém zmenšení pak odvodíme, jaké to bylo číslo v prvním kole.

Výsledek pro problém s n čísly označíme jako $J(n)$. Pokud je $n = 2k$ pro nějaké k, zůstanou po prvním kole 1, 3, 5, 7, ..., 2k - 1, tj. k čísel. Navíc je můžeme převést na Josefův problém přečíslováním. Podíváme-li se na následující tabulku,

1	3	5	7	...	$2k-1$
1	2	3	4	...	k

vidíme, že číslo z dolního řádku převedeme na číslo z horního řádku tak, že jej vynásobíme dvěma a odečteme jedničku. Můžeme psát

$$J(2k) = 2J(k) - 1. \tag{1}$$

$J(k)$ je číslo odpovídajícímu dolnímu řádku, předchozí vztah ho transformuje do číslování pro původní problém.

Je-li $n = 2k + 1$, pak po prvním kole zůstanou osoby 3, 5, 7, 9, ..., $2k + 1$. Po krátkém pohledu na tabulku

3	5	7	9	...	$2k+1$
1	2	3	4	...	k

vidíme, že tentokrát číslo ze spodního řádku převedeme na číslo z horního řádku tak, že jej vynásobíme dvěma a přičteme jedničku. Můžeme tedy psát

$$J(2k+1) = 2J(k) + 1. \tag{2}$$

Vztahy (1) a (2) stačí doplnit triviálním $J(1) = 1$.

Nyní musíme pravidla pro přečíslování při zmenšování problému využít pro určení přímého vztahu pro přeživšího číslo. Pro začátek si spočtěme prvních pár čísel do tabulky.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15

Vidíme, že pokud je n osob mocninou dvou, přežije vždycky číslo 1. Ostatně, lze to vypozorovat i z odvození vztahu (1). Můžeme tedy psát $J(2^m) = 1$.

Pokud n není roven mocnině dvou, vyjádříme jej jako $n = 2^m + l$, kde m je největší číslo takové, že $2^m \leq n$. Na mocninu dvou se n zredukuje po l škrtnutích. První číslo v pořadí za l-tým škrtnutým je $2l + 1$ (škrtáme totiž každé druhé číslo). Zbývající čísla si nyní představíme jako instanci Josefova problému, kde je prvním číslem právě $2l + 1$. Protože počet osob je mocninou dvou, je $2l + 1$ i přeživším číslem. Platí tedy, že

$$J(2^m + l) = 2l + 1. \tag{3}$$

Pokud chceme nalézt řešení Josefova problému pro n, musíme nalézt největší mocninu dvou menší než n a od n ji odečíst. Rozdíl poté vynásobíme dvěma a přičteme k němu jedničku.

2. Rozpoznávání barev

Hádanka je z oblasti interaktivních dokazovacích systémů. K jejímu vyřešení není potřeba hlubokých znalostí matematiky, postačí elementární znalost pravděpodobnosti.

Uvažujme dva kamarády, Alici a Boba. Alice je barvoslepá, Boba má různobarevné kuličky. Bob chce o tom, že kuličky jsou skutečně různobarevné, Alici přesvědčit. Té ovšem, kvůli barvoslepostí, kuličky připadají stejné. Úkolem je vymyslet scénář, ve kterém figurují jenom Alice, Bob, kuličky a mince, a díky kterém Bob může přesvědčit Alici o různobarevnosti svých ponožek s velkou jistotou. (Bob nemůže Alici přesvědčit úplně, pravděpodobnost, že Bob Alici lže se ale dá snížit na libovolně malé (nenulové) číslo.)

Řešení

Bob dá kuličky Alici, Alice drží každou kuličku v jedné ruce. Poté se Bob otočí k Alici zády tak, aby na kuličky neviděl. Alice si hodí mincí a pokud padne orel, tak kuličky prohodí (tj. kuličku, kterou drží v levé ruce, si dá do pravé ruky a tu z pravé ruky bude držet levou rukou). Bob se otočí zpět a Alice se jej zeptá, jestli kuličky prohodila. Pokud jsou kuličky skutečně různobarevné, Bob to pozná s pravděpodobností 1. Pokud nejsou různobarevné, Bob si pravděpodobností 1/2 správný výsledek tipne. Předchozí pokus lze opakovat, řekněme, že jsme jej zopakovali n-krát. Pokud nejsou nejsou různobarevné, je pravděpodobnost, že Bob odpoví n-krát správně pouhým tipováním $1/2^n$. Například pro $n = 10$ už je to méně než 1/1000. Pokud tedy Bob odpoví ve všech opakováních správně, jsou kuličky různobarevné s pravděpodobností $1 - 1/2^n$.

3. Svoboda za minci

Vězni Alois a Bořivoj si zahrají se žalářníkem následující hru. Žalářník připraví šachovnici o velikosti 8 x 8 políček. Na každé políčko umístí minci, některé z mincí jsou obráceny nahoru orlem, jiné hlavou. Poté žalářník zavolá k šachovnici Aloise (Bořivoj v ten moment šachovnici nevidí) a ukáže na jednu minci na šachovnici. Alois si poté také jednu minci na šachovnici vybere, obrátí ji a odejde. Potom zavolá žalářník Bořivoje a požádá ho, aby našel minci, kterou žalářník Aloisovi. Pokud Bořivoj tuto minci najde, jsou oba vězni propuštěni. Vězni si mohou dopředu připravit strategii, po zahájení hry už ovšem spolu nesmí komunikovat. Existuje strategie, se kterou vězni vždy zvítězí?

Řešení

Bořivoj může poznat, kterou minci žalářník Aloisovi ukázal, pouze ze situace na šachovnici, například ze seznamu míst, na kterých je mince otočená hlavou nahoru. Potřebujeme tedy nějakou funkci, která množině takových míst přiřadí místo, které označil žalářník. Aloisovou úlohou bude otočit minci na šachovnici tak, aby funkce vrátila správné místo, Bořivoj ji pak spočítá.

Očíslujme políčka na šachovnici čísly 0 až 63. Každé z těchto čísel můžeme reprezentovat pomocí řetězce 6 bitů. Dále předpokládejme, že na šachovnici je n míst s mincí otočenou hlavou nahoru. Bitové reprezentace těchto míst označíme pomocí T_i pro $i = 1, \ldots, n$. Jako J označíme bitový zápis místa, které vybral žalářník, a jako X bitový zápis místa, na kterém Alois otočí minci. Naše funkce je prostou $\oplus$ operací XOR aplikovanou po bitech na místa, na kterých je hlava. Alois tedy musí nalézt hodnotu X

v rovnici

$$(T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_n) \oplus X = J.$$

Řešením je

$$X = (T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_n) \oplus J.$$

Pokud je na místě X před otočením mince orel, protokol je zřejmě správně. Pokud je ovšem na tomto místě před otočením mince hlava, mohlo by se zdát že předchozí trik nefunguje. Uvědomíme-li si však, že v tomto případě máme $X = T_i$ pro nějaké i a navíc pro libovolný bitový řetězec S platí $S \oplus S = 0$, pak vidíme, že

$$\begin{aligned} J &= (T_1 \oplus \cdots \oplus T_i \oplus \cdots \oplus T_n) \oplus T_i = \\ &= T_1 \oplus \cdots \oplus T_i \oplus T_i \oplus \cdots \oplus T_n = T_1 \oplus \ldots T_{i-1} \oplus T_{i+1} \oplus \cdots \oplus T_n \end{aligned}$$

a Bořivoj spočítá správnou pozici.

4. Inspekce čerpacích stanic

Inspektor chce navštívit benzínky, které jsou rovnoměrně rozmístěny na úseku silnice. Očíslujme si je 1, 2, ..., n. Inspektor začíná na benzínce 1, u benzínky 2 až $n-1$ musí všechny navštívit stejněkrát, a benzínky 1 a n musí navštívit nejméně dvakrát. Není určeno, na které benzínce má inspektor cestu zakončit. V jakém pořadí musí inspektor benzínky navštívit, aby urazil nejkratší vzdálenost a proč?

Řešení

Úlohu si můžeme zjednodušit a převést do grafové podoby. Protože minimalizujeme vzdálenost, kterou inspektor urazí, můžeme předpokládat, že když jede okolo nějaké benzínky, tak ji i navštíví. Tím pádem hledáme nejkratší sled začínající v uzlu 1, který navštíví uzly 1 a n nejméně dvakrát, v následujícím grafu:

$$1 \text{ —— } 2 \text{ —— } \cdots \text{ —— } n$$

Délku nejkratšího sledu můžeme zespodu omezit následovně. Protože máme navštívit uzel n dvakrát, musíme i uzel $n-1$ navštívit minimálně dvakrát. Podobně odvodíme, že i ostatní uzly musíme navštívit minimálně dvakrát, dohromady je to $2n$ návštěv. Při každé návštěvě uzlu, mimo první návštěvy uzly 1, ve kterém začínáme, musíme přejít po hraně ze sousedního uzlu, tj. dohromady přejdeme přes $2n - 1$ hran.

Lze tohoto minima dosáhnout? Pokud je n sudé, pak ano. Můžeme uzly projít v pořadí

$$1, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 4, \ldots,$$

tak jako na na následujícím obrázku.

$$1 \rightleftarrows 2 \longrightarrow 3 \rightleftarrows 4 \longrightarrow \cdots$$

Pokud je ovšem n liché, pak minima dosáhnout nemůžeme. Platí totiž následující tvrzení:

Pokud je n liché, neexistuje sled, ve kterém bychom navštívili každý z mezilehlých uzlů $2, \ldots, n-1$ právě dvakrát.

Tvrzení dokážeme indukcí. Pro $n = 3$ (kde 2 je jediný mezilehlý uzel) tvrzení platí. Předpokládejme tedy, že platí pro liché $n \geq 3$. Pokud by tvrzení neplatilo pro $n + 2$, museli bychom uzel $n + 1$ navštívit dvakrát a sled bychom museli zakončit $\ldots, n+1, n+2, n+1, n+2$, a žádný z uzlů $n+1, n+2$ předtím nenavštívit. Pak by ovšem předchozí segment sledu, ve kterém jsme navštívili uzly $1, \ldots, n$, byl legitimním sledem odpovídajícím zadání pro n uzlů. To je ale spor s indukčním předpokladem.

Pro liché n je tak optimálním sledem

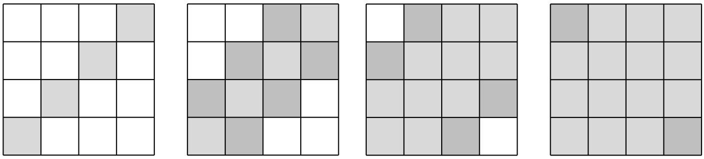
$$1, 2, \ldots, n-1, n, n-1, \ldots, 2, 1, 2, \ldots, n-1, n.$$

5. Nakažená šachovnice

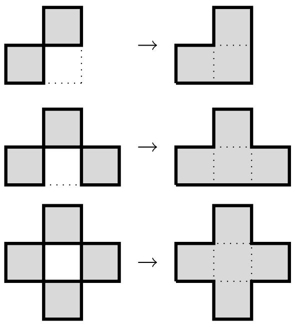
Představme si, že na zobecněné šachovnici, která má stranu dlouhou n políček, se mohou jednotlivá políčka nakazit virem. Z nakaženého políčka virus nikdy nezmizí. Do nenakaženého políčka se rozšíří v případě, že alespoň dvě jeho sousední políčka jsou nakažená. Uvažujeme přitom pouze horizontální a vertikální sousedy. Jaký je minimální počet políček, která musíme na začátku nakazit, aby se nákaza rozšířila na celou šachovnici?

Řešení

Po chvilce experimentování zjistíme, že lze najít n políček, ze kterých se nákaza úspěšně rozšíří. Můžeme vybrat například diagonálu. Viz následující příklad na šachovnici se stranou dlouhou 4 políčka.



Zbývá ověřit, že na začátku nelze vybrat méně než n políček. K tomu postačí následující úvaha. Změříme obvod souvislých nakažených oblastí, za jednotku zvolíme hranu jednoho políčka. Podíváme-li se na předchozí obrázky, tento obvod je u všech 4 šachovnic vždy 16 hran. To není náhoda. Nakazíme-li totiž nenakažené políčko, obvod nakažené části se nemůže zvětšit. Nakažením vždy z obvodu odebereme nejméně dvě hrany (hrany mezi nenakaženým políčkem a jeho nakaženými sousedy) a přidáme maximálně dvě hrany (hrany mezi nenakaženým políčkem a jeho nenakaženými sousedy). Viz příklady na následujícím obrázku.



Na konci má nakažená část obvod $4n$ hran, na začátku tedy musíme nakazit minimálně n políček.

Poznámka. První hádanka je převzata z knihy [1]. Druhá hádanka je variací na interaktivní protokol pro grafový izomorfismus. Zbylé hádanky jsou převzaty z knihy [2].

Literatura

[1] *Graham, R., Knuth, D. E., Patashnik, O.*: Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science (2nd Edition). Addison–Wesley Publishing, Reading, Massachusetts, 1994.

[2] *Levitin, A. Levitin, M.*: Algorithmic puzzles. Oxford University Press, Oxford, 2011.