

FYZIKA

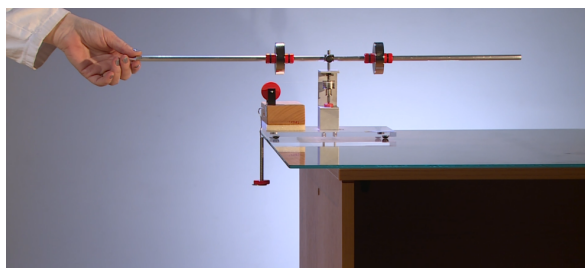
Overenie pohybovej rovnice otáčavého pohybu pomocou videomerania

ZUZANA GIBOVÁ

Fakulta elektrotechniky a informatiky, Technická univerzita v Košiciach, SLOVENSKO

Úvod

Na demonštrovanie rotačného pohybu je vhodná rotačná aparátúra [1], v ktorej otáčavý pohyb vykonáva hliníková dutá tyč okolo osi prechádzajúcej jej stredom (obr. 1). Súčasťou aparatúry je kladka, závažia rôznej hmotnosti, lanko, disky rôznych hmotností, držiak závaží a svorky na upevnenie diskov. Lanko sa upevňuje na os otáčania navinutím na hriadeľ a vedie sa cez kladku. Na jeho koniec sa zavesí závažie, ktoré slúži ako hybná sila pre roztočenie celej aparatúry. Pomocou diskov rôznych hmotností, ktoré možno upevniť na tyč v rôznych polohách, sa mení moment zotrvačnosti tyče a jej rotačný pohyb. Použitím závaží rôznej hmotnosti je možné meniť moment sily, ktorá roztáča rotačnú aparátúru. To umožňuje skúmať vzťahy medzi uhlovým zrýchlením, momentom zotrvačnosti a momentom síl, teda overiť pohybovú rovnicu $M = I\varepsilon$.



Obr. 1 Otáčavý pohyb vykonáva hliníková dutá tyč okolo osi prechádzajúcej jej stredom

Podstatou merania je odmerať uhlové zrýchlenie rotačnej aparatúry. V článku prezentujem spôsob jeho určenia pomocou videozáznamu otáčavého pohybu rotačnej aparatúry, z ktorého sa odmeria závislosť počtu polotáčok od času zastavovaním videa v príslušných polohách hliníkovej tyče (po prejení polotáčky). (Vplyv odporu prostredia nie je pre experiment vo videomeraní významný, preto ho zanedbávame, podrobnejšiu diskusiu k otázke tlmenia pohybu možno nájsť v [2].) Videomerania použité v tomto článku sú dostupné na stránke Katedry fyziky FEI TUKE [3].

Princíp merania

Z pohybovej rovnice

$$\varepsilon = \frac{M}{I} \quad (1)$$

vyplýva, že ak teleso vykonáva otáčavý pohyb vplyvom nemenného momentu sily M , je možné zmenou momentu zotrvačnosti I meniť jeho uhlové zrýchlenie ε . Na overenie tohto predpokladu použijeme dve videá, na ktorých je rotačná aparatúra uvádzaná do pohybu prostredníctvom rovnakého závažia $m = 30$ g, ktoré je zavesené na lanku navinutom na malom hriadelí, tým je zabezpečené, že moment pôsobiacich síl je konštantný.

Na závažie pôsobí tiažová sila F_g a ťahová sila závesu F_1 , ktorých výslednica udeľuje závažiu konštantné zrýchlenie a , s ktorým klesá nadol, pohybová rovnica má tvar

$$ma = F_g - F_1. \quad (2)$$

Moment sily, ktorý roztáča kladku, je rovný súčinu ťahovej sily závesu F_1 a polomeru hriadela r

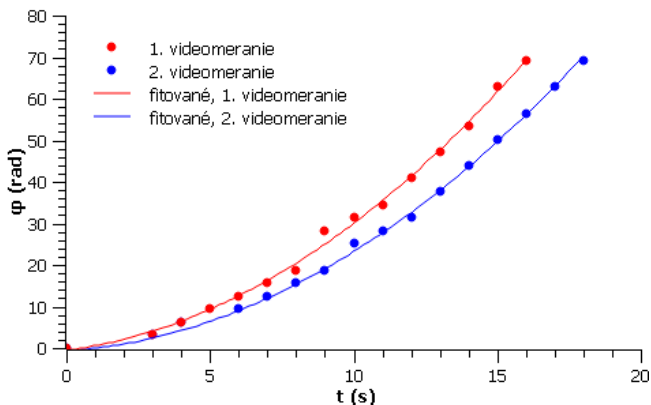
$$M = rF_1, \quad (3)$$

v dôsledku ktorého vykonáva rotačná aparatúra rovnomerne zrýchlený otáčavý pohyb, ktorého uhlová dráha je daná

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2 + \varphi_0. \quad (4)$$

Na videách [3, 4] sú disky hmotnosti 200 g umiestnené v rôznych vzdialenostiach od osi otáčania, rotačná aparatúra má rôzne momenty zotrvačnosti, preto odmerané hodnoty uhlových zrýchlení pre jednotlivé vzdialenosti budú mať rôznu hodnotu.

Pri meraní pomocou videa [3] je dobré si najprv pozrieť celé video a vybrať polohu, v ktorej video bude zastavované pri dosiahnutí požadovanej polotáčky. Najlepšie je zastaviť video, keď sa tyč nachádza vo vodorovnej polohe na obrazovke a odčítavať polotáčky na ľavej strane videa. Potom video pustíme ešte raz spomalene. Zaznamenáme časový okamih, v ktorom sa rotačná aparatúra dala do pohybu, ten budeme odčítavať od časových údajov pre jednotlivé polotáčky. Na videu je čas meraný v sekundách a zobrazovaný vo formáte 0:05 s (tento údaj predstavuje 5 s). Video zastavujeme postupne pri jednotlivých polotáčkach a odčítame príslušný čas. Odporúčam odmerať čas pre 20–24 polôh polotáčok. Keďže čas merania je zobrazovaný v celých sekundách, pri vyšších otáčkach odmeriame rovnaký čas pre dve alebo tri polotáčky, čo je určitá nepresnosť merania. V tomto prípade vyberieme len každé druhé meranie. Ako bude diskutované neskôr, je možné spresniť meranie času až na milisekundy.



Obr. 2 Odmerané závislosti

Každjej polotáčke prislúcha uhlová dráha $\varphi = n\pi$, kde $n = 1, 2, \dots$. V časovom okamihu, keď sa rotačná aparatúra začína otáčať, t. j. $t = 0$ s je $\varphi = 0$ rad. Z odmeranej závislosti $\varphi = f(t)$ je možné určiť hodnotu uhlového zrýchlenia rotačnej aparatúry. Keďže uhlová dráha (4) je kvadratickou funkciou času, na odmeranú závislosť môžeme nafitovať funkciu

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2. \quad (5)$$

Porovnaním koeficientov fitovacej funkcie s rovnicou uhlovej dráhy (4) pre uhlové zrýchlenie platí [5]

$$\varepsilon = 2c_2. \quad (6)$$

Výsledky merania

Videa, ktoré boli použité na meranie sú umiestnené na stránke [3]. V prvom videomeraní (web.tuke.sk/feikf/video/files/UR1_4tsc9t61.mp4) sa rotačná aparatúra začína otáčať v čase 14 s. V druhom videomeraní (web.tuke.sk/feikf/video/files/UR2_hqjtmh1.mp4) sa rotačná aparatúra začína otáčať v čase 5 s. Tento čas odčítame od odmeraných hodnôt času pre jednotlivé polotáčky. Pre prvé meranie je poloha prvej polotáčky odmeraná v čase 17 s, reálne je to $t = 17 \text{ s} - 14 \text{ s} = 3 \text{ s}$ (tab. 1). Odmerané závislosti $\varphi = f(t)$ spolu s ich fitmi sú na obr. 2.

polotáčka	1. videomeranie		2. videomeranie	
	t/s	φ/rad	t/s	φ/rad
0	0	0	0	0
1	3	3,14	3	3,14
2	4	6,28	4	6,28
3	5	9,42	6	9,42
4	6	12,56	7	12,56
5	7	15,7	8	15,7
6	8	18,84	9	18,84
7	8	21,98	9	21,98
8	9	25,12	10	25,12
9	9	28,26	11	28,26
10	10	31,4	12	31,4
11	11	34,54	12	34,54
12	11	37,68	13	37,68
13	12	40,82	13	40,82
14	12	43,96	14	43,96
15	13	47,1	14	47,1
16	13	50,24	15	50,24
17	14	53,38	15	53,38
18	14	56,52	16	56,52
19	14	59,66	16	59,66
20	15	62,8	17	62,8
21	15	65,94	17	65,94
22	16	69,08	18	69,08

Tab. 1 Výsledky videomerania

Fitovaním oboch závislostí polynómom (5) určíme hodnoty parametrov c_2 , pomocou ktorých vypočítame uhlové zrýchlenie α pre obe merania podľa vzťahu (6); viď (tab. 2).

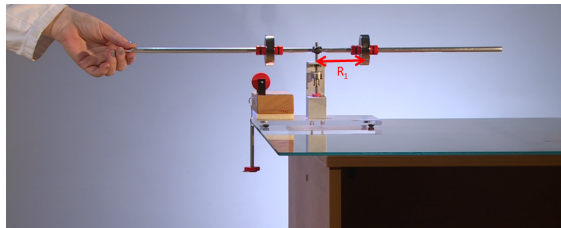
	c_2/s^{-1}	ε/s^{-1}	$I/(kg \cdot m^2)$	$M/(N \cdot m)$
1. videomeranie	0,217	0,434	0,00428	0,00185
2. videomeranie	0,193	0,386	0,00563	0,00217

Tab. 2 Zrýchlenie, moment zotrvačnosti a moment sily

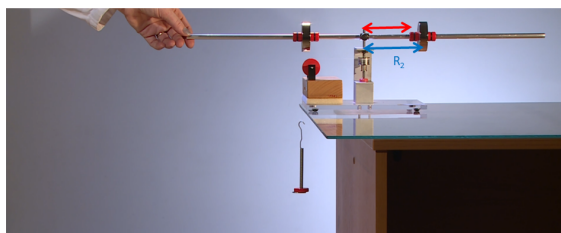
Pre moment zotrvačnosti sústavy tyč a disky platí

$$I = \frac{1}{12}m_T l^2 + 2m_d R^2, \quad (7)$$

kde l a m_T sú dĺžka a hmotnosť tyče, m_d je hmotnosť diskov a R je ich vzdialenosť od osi otáčania. Zo vzťahu (7) vyplýva, že moment zotrvačnosti rotačnej aparatúry závisí len od polohy valčekov umiestnených na tyči. Porovnaním polôh diskov na obr. 3 a obr. 4 je zrejmé, že pri druhom videomeraní sú disky umiestnené vo väčšej vzdialenosti od osi otáčania ako pri prvom meraní, a teda $I_1 < I_2$.



Obr. 3 Prvá poloha disku



Obr. 4 Druhá poloha disku

Potom z pohybovej rovnice (1) vyplýva, že $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, pri prvom videomeraní sa rotačná aparátúra pohybuje s väčším zrýchlením, čo bolo meraním potvrdené (viď tab. 2). Tým sme overili platnosť pohybovej rovnice. (Odporúčam pozrieť aj naše demonštračné video, kde je to pekne vidieť [4]). Pomocou pohybovej rovnice je možné dopočítať hodnotu momentu pôsobiacich síl na rotačnú aparátúru, ktorý by mal byť konštantný. Z tab. 2 je zrejmé, že vypočítané hodnoty momentov pôsobiacich síl na rotačnú aparátúru nie sú vďaka nepresnostiam pri meraní úplne rovnaké.

Pre náročnejších

Skutočnú hodnotu momentu zotrvačnosti je možné v oboch videomeranách vypočítať, ak poznáme skutočné hodnoty dĺžky tyče, jej hmotnosť a hmotnosť diskov umiestnených na tyči. Ich hodnoty sú $l = 60$ cm, $m_T = 0,05817$ kg, $m_d = 200$ g. Potom odmeriame na videu pásmovým meradlom dĺžku tyče l' a vzdialenosť diskov od osi otáčania R' . Skutočnú hodnotu vzdialenosti diskov od osi otáčania nanormujeme podľa vzťahu

$$R = \frac{l}{l'} R'.$$

Moje vypočítané hodnoty sú $R_1 = 7,97$ cm, $R_2 = 9,86$ cm. Na výpočet momentu zotrvačnosti rotačnej aparátúry použijeme vzťah (7), vypočítané hodnoty sú uvedené v tab. 2.

Spresnenie merania času

Navrhnutým spôsobom overovali platnosť pohybovej rovnice otáčavého pohybu dvaja študenti druháci na bakalárskom stupni štúdia FEI TUKE v rámci predmetu Fyzikálne meranie. Ako som vyššie v článku spomenula, je meranie času polôh polotáčok ovplyvnené chybou, ktorá je spôsobená malou presnosťou času na videu. Je možné túto presnosť zlepšiť stiahnutím doplnkového modulu pre program VLC v prostredí Windows 10 (link [6]) a nainštalovať si ho podľa pokynov [7]. Potom sa čas na videu zobrazuje v milisekundách. Spomenuté vylepšenie navrhli moji študenti, ktorí toto meranie robili sami z domu. Odmerané závislosti $\varphi = f(t)$ sú v tab. 3 a na obr. 5. Týmto spôsobom odmerali porovnateľné hodnoty uhlových zrýchlení $\varepsilon_1 = 0,467$ s⁻², $\varepsilon_2 = 0,35$ s⁻² vzhľadom na hodnoty v tab. 2. Hodnoty momentov síl vypočítané študentmi sú vzhľadom na hodnoty v tab. 2 oveľa presnejšie, sú takmer rovnaké ($M_1 = 0,00199$ N · m, $M_2 = 0,00197$ N · m).

polotáčka	1. videomeranie		2. videomeranie	
	t/s	φ/rad	t/s	φ/rad
0	0	0	0	0
1	3,015	3,14	3,201	3,14
2	4,403	6,28	4,702	6,28
3	5,503	9,42	6,202	9,42
4	6,365	12,56	7,202	12,56
5	7,069	15,7	7,701	15,7
6	7,819	18,84	8,951	18,84
7	8,369	21,98	9,701	21,98
8	9,119	25,12	10,451	25,12
9	9,619	28,26	11,201	28,26
10	10,369	31,4	11,701	31,4
11	10,869	34,54	12,451	34,54
12	11,369	37,68	12,951	37,68
13	11,869	40,82	13,701	40,82
14	12,369	43,96	14,151	43,96
15	12,869	47,1	14,901	47,1
16	13,369	50,24	15,401	50,24
17	13,619	53,38	15,95	53,38
18	14,12	56,52	16,201	56,52
19	14,619	59,66	16,952	59,66
20	15,119	62,8	17,451	62,8
21	15,619	65,94	17,709	65,94
22	15,869	69,08	18,202	69,08

Tab. 3 Výsledky spresneného videomerania

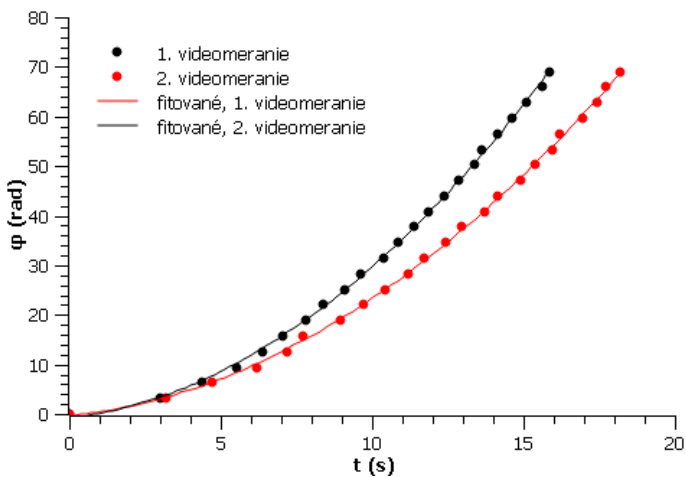
Ďalšie možnosti merania s rotačnou aparátúrou

Pomocou rotačnej aparátúry je možné overiť vzťah (7), podľa ktorého moment zotrvačnosti aparátúry I závisí od druhej mocniny vzdialenosti diskov od osi otáčania R , pričom sa nemení moment zotrvačnosti tyče

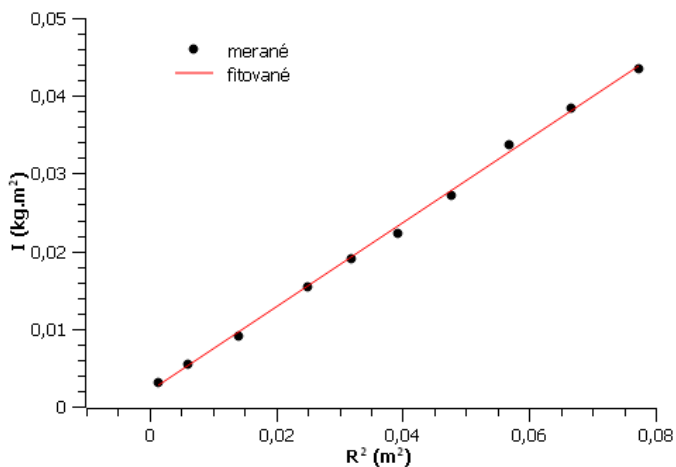
$$I_T = \frac{1}{12} m_T l^2.$$

Pri overovaní tohto vzťahu, stačí meniť vzdialenosť diskov od osi otáčania R , ktorú meníme s krokom po troch centimetroch po stred diskov. Pre

každú vzdialenosť odmeriame uhlové zrýchlenie ε a pomocou vzťahu $I = M/\varepsilon$ určíme moment zotrvačnosti pre dané R . Závislosť $I = f(R^2)$ je približne lineárna, čím je potvrdená platnosť tohto vzťahu (obr. 6).



Obr. 5 Odmerané závislosti $\varphi = f(t)$



Obr. 6 Fitovanie momenta zotrvačnosti

Ak odmeriame dráhu s , ktorú prejde závažie hmotnosti m smerom nadol počas rovnomerne zrýchleného otáčavého pohybu rotačnej aparatúry a dobu t , je možné určiť hodnotu uhlového zrýchlenia ε aj pomocou odmeranej dráhy a porovnať ju s nameranou hodnotou určenou pomocou videozáznamov. Smerom nadol závažie vykonáva rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb, ktorého dráha je daná $s = at^2/2$. Pre uhlové zrýchlenie platí

$$\varepsilon = \frac{a}{r} \quad (8)$$

kde r je polomer hriadeľa a zrýchlenie

$$a = \frac{2s}{t^2} \quad (9)$$

Dráhu s nevieme určiť z videozáznamov, nie je celá zaznamenaná, preto urobíme reálne meranie, pri ktorom pre zvolené hodnoty vzdialenosti R odmeriame príslušné dráhy a doby (tab. 4).

	R/cm	s/m	t/s	$a/(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$	$\varepsilon/\text{s}^{-2}$
1. meranie	7,97	0,62	17,94	0,00385	0,428
2. meranie	9,86	0,625	18,68	0,00358	0,398

Tab. 4 Určenie úlového zrýchlenia z dráhy s

Porovnaním získaných hodnôt uhlového zrýchlenia, pomocou odmeranej dráhy a doby závažia klesajúceho nadol (tab. 4), s hodnotami určenými pomocou videozáznamov (tab. 2) vychádzajú podobné hodnoty. Je možné pomocou odmeraných hodnôt v tab. 4 určiť aj moment zotrvačnosti a porovnať ho s hodnotami určenými pomocou rovnice (7). Z rovnice (1) pre moment zotrvačnosti $I = M/\varepsilon$, kde na určenie momentu sily použijeme rovnice (2) a (3)

$$M = m(g - a)r,$$

v ktorej $F_1 = mg - ma$. Uhlové zrýchlenie vyjadríme pomocou rovníc (8) a (9)

$$\varepsilon = \frac{2s}{t^2 r}.$$

Potom pre moment zotrvačnosti získáme

$$I = \frac{m(g - a)r^2 t^2}{2s} \quad (10)$$

Použitím odmeraných hodnôt v tab. 4, hmotnosti závažia $m = 0,03$ kg a polomeru hriadeľa $r = 0,009$ m určíme hodnotu momentu zotrvačnosti pre obe vzdialenosti R (tab. 5).

	R/cm	$I_{\text{rov}7}/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	$I_{\text{rov}10}/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$
1. meranie	7,97	0,00428	0,00618
2. meranie	9,86	0,00563	0,00665

Tab. 5 Určenie momentov zotrvačnosti

Hodnoty momentu zotrvačnosti určené pomocou rovnice (10) sú vyššie ako hodnoty určené pomocou rovnice (6). Je to z toho dôvodu, že sú vždy pri pohybe rotačnej aparátúry prítomné odporové sily, ktorých veľkosť nepoznáme. Odporové sily ovplyvňujú veľkosť uhlovej rýchlosti otáčania rotačnej aparátúry [8]. Tieto sily nie sú konštantné, preto pohybová rovnica $M = I\varepsilon$ neposkytuje úplne hodnoverný údaj o momente. Napriek tomu, pohyb rotačnej aparátúry pri menších rýchlostiach, môže byť modelovaný ako približne rovnomerne zrýchlený.

Poznámka: Pri určovaní uhlového zrýchlenia rotačnej aparátúry môžeme použiť okrem videozáznamov aj ďalšie dva postupy merania. Použijeme spôsob navrhnutý výrobcom [1], kde sa určuje stredná hodnota uhlového zrýchlenia, tak, že sa odmeria doba, za ktorú prejde závažie celú dráhu zostupu t_1 , v zapätí sa odmeria doba t_2 , za ktorú tyč vykoná posledné dve otáčky. Pomocou doby t_2 sa určí uhlová rýchlosť na konci zostupu

$$\omega = \frac{4\pi}{t_2}$$

a následne priemerné uhlové zrýchlenie

$$\varepsilon = \frac{\omega - 0}{t_1 - 0} = \frac{\omega}{t_1}.$$

Tento postup je možné použiť aj pri vyššie navrhnutom overovaní pohybovej rovnice pomocou videomeraní, z ktorých vieme jednotlivé časy určiť.

Alebo je možné použiť systém Coach, kde sa k rotačnej aparátúre pripojí merací panel, senzor polohy a počítač (obr. 7).

Senzor polohy zaznamenáva závislosť počtu polotáčok od času pri otáčavom pohybe. Pri spracovaní nameraných dát postupujeme rovnako, ako to bolo navrhnuté pri meraní pomocou videozáznamov, kde pomocou fitovania určíme hodnotu uhlového zrýchlenia.



Obr. 7 Propojenie zo systémom Coach

Záver

Videomeranie úplne nenahradí reálne meranie v danom čase, študentom pri ňom chýba kontakt s prístrojmi. Napriek tomu navrhnutý spôsob merania pomocou videomerania pokladám za možnú alternatívu reálneho merania. Z reakcií mojich študentov vyplýva, že toto meranie bolo pre nich zaujímavé, dôkazom bola ich snaha zlepšiť presnosť merania času a aj sa vyjadrili, že sa im toto meranie páčilo. Museli pri ňom použiť aj nejaké meradlá a zistiť správny spôsob merania času pre dané polohy polotáčok. Boli donútení k väčšej samostatnosti, ale aj k vzájomnej spolupráci, pretože do ich merania som nevstupovala, poskytla som im iba návod a inštrukcie k meraniu. Navyše porovnaním odmeraných hodnôt uhlových zrýchlení určených s menšou presnosťou merania času s hodnotami odmeranými s lepšou presnosťou, sa javí navrhnutý spôsob merania pomerne presný a dostatočný.

Okrem toho výhodou videomerania je možnosť ho použiť pri prezenčnej výučbe, v prípade, že nemáme k dispozícii podobnú aparatúru na otáčavý pohyb. Môžeme ho použiť aj v prípade, ak chceme odmerať len uhlové zrýchlenie, resp. ďalšie kinematické veličiny otáčavého pohybu (uhlová rýchlosť, počiatočná uhlová dráha, ktoré dostaneme fitovaním rovnice pre uhlovú dráhu a porovnaním koeficientov), kde použijeme jedno videomeranie a súčasne s ním demonštrovať rovnomerne zrýchlený otáčavý pohyb.

Pri reálnom meraní rotačná aparatúra pokytuje aj ďalšie možnosti merania, napr. overiť Steinerovu vetu, skúmať vplyv trecích a viskózných síl na otáčavý pohyb, určiť uhlové zrýchlenie viacerými spôsobmi, ale aj skúmať ďalšie kinematické a dynamické veličiny pri tomto pohybe.

Literatúra

- [1] *3B Scientific Physics: Rotational Motion Apparatus*, [online]. Dostupné z: https://www.3bscientific.com/product-manual/1006785_EN.pdf.
- [2] *Kladivová, M., Kovařáková, M., Gibová, Z., Fričová, O., Hutníková, M., Kecer, J.*: Laboratory experiment for the study of friction forces using rotating apparatus. *European Journal of Physics*, roč. 37 (2016), č. 6, 065055 (s. 1–15).
- [3] <http://web.tuke.sk/feikf/video/videomerania-.html>.
- [4] <http://web.tuke.sk/feikf/video/ota-avy-pohyb-.html>.
- [5] *Gibová, Z., Fričová, O., Hutníková, M., Kecer, J., Kladivová, M., Kovařáková, M.*: Demonstrační experiment s grafickou podporou systému IP-Coach. In: MITAV 2015. Univerzita obrany, Brno 2015, s. 1–6.
- [6] *Time v3.2 – addons.videolan.org* [online]. Dostupné z: <https://addons.videolan.org/p/1154032/>.
- [7] *How to View Milliseconds in VLC Media Player on Windows 10?* [online]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=A9yq8qT0hqY>.
- [8] *Kovařáková, M., Kladivová, M., Fričová, O., Gibová, Z., Hutníková, M., Kecer, J.*: Viscous friction in standard rotational motion experiments. *European Journal of Physics*, roč. 41 (2020), č. 3, s. 1–10.

Rudolf Clausius

(k dvoustému výročí narození)

JITKA HOŠKOVÁ PROKŠOVÁ

Fakulta pedagogická ZČU, Plzeň

Rudolf Julius Emanuel Clausius patřil k předním německým fyzikům 19. století. V mládí u něj nad zájmem o historii převážilo zaujetí o aplikace matematiky, a ty ho přivedly ke studiu optických a tepelných jevů. V polovině 19. století se zasloužil o vznik termodynamiky jako teoretické disciplíny a o její užití na obecné makroskopické procesy.