MATEMATIKA

Problémové úlohy ve výuce geometrie

TOMÁŠ ZUŠČÁK

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

1. Úvod

Současné pojetí matematiky na střední škole je ovlivněno přístupem, který by se dal nazvat přístupem „strukturálním". Dílčí oblasti matematiky jsou představovány jako struktury, které mají vlastní obsah a disponují určitým okruhem úloh a metod jejich řešení. Stejně probíhá i výuka geometrie v oblastech planimetrie, stereometrie, goniometrie a analytická geometrie.

To přináší bezesporu své výhody, má to však i určitý nedostatek. Matematiku bychom neměli vnímat jako studium dílčích matematických struktur, ale spíše jako nástroj k řešení problémů. Není z hlediska kvalitního matematického vzdělávání dobré, aby metoda řešení úlohy byla a priori určena tím, v které kapitole učiva se nachází. To ostatně ukázala i živá diskuse nad podobou těžší verze maturitního testu z matematiky v roce 2012. Vhodnější by bylo snažit se koncipovat školskou matematiku problémově. To ovšem nevylučuje nutnost probírat teoretické úseky matematiky včetně dílčích metod řešení typových úloh, protože pouze jejich kvalitní zvládnutí je předpokladem úspěšného uplatnění při řešení problému.

Představení matematiky jako nástroje k řešení problému je možné i za současného stavu. V případě geometrie nestačí pouze úlohu jedním způsobem vyřešit. Je třeba snažit se úlohu řešit různými způsoby, hledat inspiraci z jednoho přístupu k řešení úlohy k řešením dalším, spojovat početní řešení s přístupy konstruktivními, hledat řešení jednodušší a všímat si podnětů, které přináší úloha k dalšímu rozvinutí problému, případně k obohacení teorie.

2. Formulace problému

Učitel matematiky, který by uplatňoval tento přístup, musí pochopitelně disponovat souborem vhodných problémů. V dalším textu to ukážeme na jedné vybrané úloze.

Úloha 1

V trojúhelníku ABC platí (při obvyklém označení délek jeho stran a velikostí vnitřních úhlů) $\alpha = 2\beta$. Vyjádřete délku strany a pomocí délek stran b, c[1].

První řešení úlohy 1. Předpokládejme, že trojúhelník daných vlastností existuje. Podle sinové věty platí

$$\frac{a}{\sin 2\beta} = \frac{b}{\sin \beta}, \quad \text{odtud plyne} \quad a = 2b\cos\beta, \quad \text{tj.} \quad \cos\beta = \frac{a}{2b}. \tag{1}$$

Podle kosinové věty můžeme psát:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 2\beta, \ \text{tj. } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(2\cos^2\beta - 1) \tag{2}$$

Dosadíme ze vztahu (1) do (2), obdržíme po úpravě

$$a = \sqrt{b(b+c)}. \tag{3}$$

Řešení této úlohy nám nabízí vhodný prostor pro procvičení a propojení základních vět trigonometrie a goniometrických vztahů. Nemusíme se však omezit pouze na budování dílčí oblasti matematiky (v tomto případě goniometrie). Tvar výsledku nás může podnítit k formulaci dalšího problému. Vztah (3) je možno využít mj. k sestrojení délky strany a uvažovaného trojúhelníku ABC pomocí délek jeho stran b a c.

Úloha 2

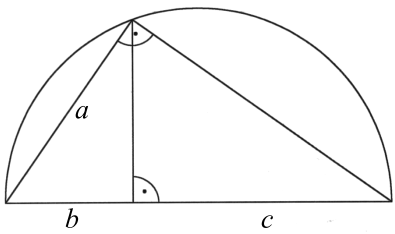
Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány délky jeho stran b a c a je-li velikost jeho vnitřního úhlu α dvojnásobkem velikosti vnitřního úhlu β tohoto trojúhelníku.

[1] viz [1], str. 157, úloha č. 64.

Tato úloha nezapadá do běžného rámce konstruktivních úloh o trojúhelníku, které jsou studenti zvyklí řešit – představuje pro ně problém. Pokud jsou navíc navyklí zařadit si úlohu do určité oblasti matematiky (v tomto případě planimetrie), navádí je zadání ke snaze nalézt řešení metodami „syntetické geometrie". Tak se může stát úloha pro řadu z nich neřešitelnou. Pokud však překročíme (možná umělé) hranice mezi strukturami dílčích poznatků a metod, otevřou se nám možnosti, které nás dovedou k zajímavým řešením této úlohy.

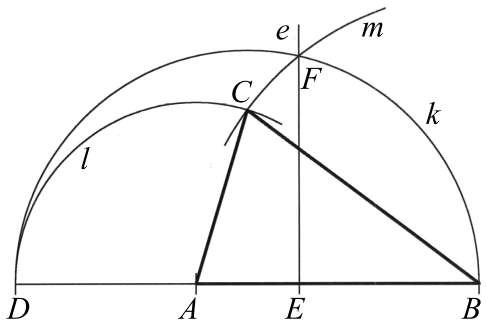
3. Využití početního řešení úlohy 2

První řešení úlohy 2 – na základě využití Eukleidovy věty o odvěsně (obr. 1).



Obr. 1

Můžeme tak dospět k následující konstrukci (obr. 2).



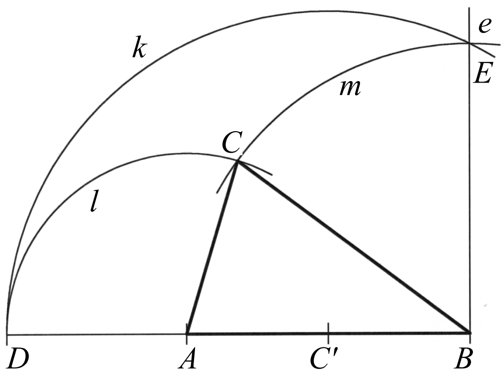
Obr. 2

Sestrojíme úsečku AB o délce c a na polopřímce BA bod E ve vzdálenosti b od bodu B. Dále sestrojíme na polopřímce opačné k polopřímce AB bod D ve vzdálenosti b od bodu A. Sestrojíme kružnici k nad průměrem DB a v bodě E vztyčíme kolmici e k přímce AB. Průsečík přímky e a kružnice k označíme F. Zřejmě $|BF| = a$. Konstrukce trojúhelníku ABC je dále již zřejmá.

Druhé řešení úlohy 2. S ohledem na vztah (1) můžeme úsečku o délce a chápat jako střední geometrickou úměrnou úseček o délkách b a $b + c$. Její určení není nutně postaveno na užití Eukleidových vět. Upravíme-li vztah (3), dostaneme

$$a^2 = b^2 + bc = \left(b + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c}{2}^2.$$

Úsečku o délce a můžeme tedy sestrojit jako odvěsnu pravoúhlého trojúhelníku o druhé odvěsně délky $\frac{c}{2}$ a přeponě velikosti $(b + \frac{c}{2})$. To nás vede k následující konstrukci (obr. 3).



Obr. 3

Sestrojíme úsečku AB o délce c a její střed C'. Na polopřímce opačné k polopřímce AB sestrojíme bod D ve vzdálenosti b od A. V bodě B vztyčíme kolmici e k přímce AB. Sestrojíme kružnici k se středem C', která prochází bodem D. Označíme E průsečík přímky e a kružnice k. Protože $|C'E| = b + \frac{c}{2}$ a $|BC'| = \frac{c}{2}$, zjevně platí $|BE| = a$. Konstrukce trojúhelníku ABC je již zřejmá.

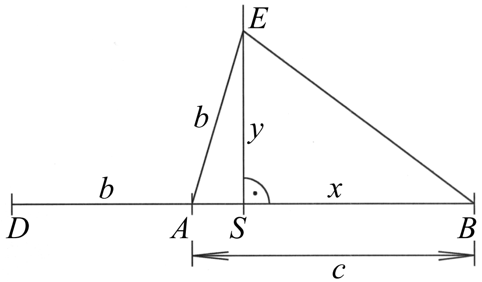
Třetí řešení úlohy 2 je opět postaveno na úpravách vztahu (3). Platí

$$a^2 = b^2 + bc = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + b^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2.$$

Označme dále

$$x = \sqrt{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}, \quad y = \sqrt{b^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2}$$

(za předpokladu, že výraz pod druhou z odmocnin je kladný). Vidíme, že délku strany a můžeme sestrojit jako přeponu pravoúhlého trojúhelníku o odvěsnách délek x a y. Uvažujme úsečku AB o délce c a bod D na opačné polopřímce k polopřímce AB ve vzdálenosti b od bodu A. Střed úsečky BD označíme S. Na ose úsečky BD leží bod E ve vzdálenosti b od bodu A (obr. 4).

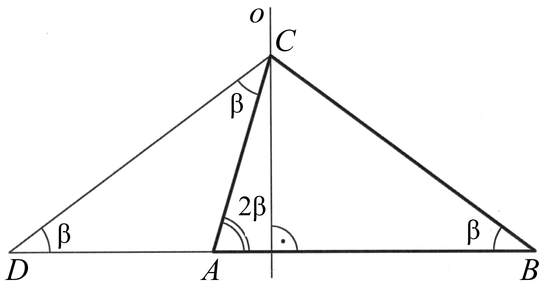


Obr. 4

Platí $|SB| = (b + c)/2 = x$, $|AS| = |c - (b + c)/2| = |(c - b)/2|$. Protože $|AE| = b$, je $|SE| = y$ (bod E tedy existuje, je-li splněn výše uvedený předpoklad), a protože $|SB| = x$, je $|BE| = a$. Vzhledem k tomu, že $|AE| = b$ a $|BE| = a$, je bod E totožný s vrcholem C hledaného trojúhelníku ABC. Odtud již plyne jednoduché řešení úlohy 2.

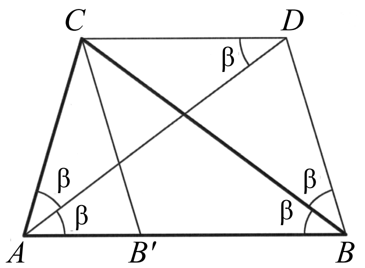
4. Ryze syntetická řešení úlohy 2

Čtvrté řešení úlohy 2. Zde si můžeme všimnout, že společným rysem všech tří řešení je užití úsečky BD o velikosti $b + c$. Využijme ji při rozboru úlohy 2. Předpokládejme, že hledaný trojúhelník ABC existuje. Na přímce AB určíme bod D podobně jako v předchozích úvahách (obr. 5). Trojúhelník ACD je rovnoramenný se základnou CD. Vnitřní úhly trojúhelníka ACD při vrcholu C a D jsou shodné a součet jejich velikostí je roven velikosti vnějšího úhlu trojúhelníka ACD při vrcholu A, tj. 2β. Odtud vidíme, že úhel CDA má velikost β a je tak shodný s úhlem ABC. Trojúhelník BCD je tudíž rovnoramenný se základnou BD. Proto bod C leží na ose úsečky BD. Odtud plynoucí konstruktivní řešení úlohy 2 je zřejmé.

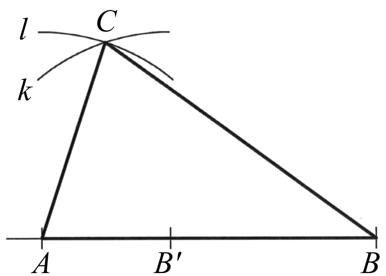


Obr. 5

Páté řešení úlohy 2. Předpokládejme, že hledaný trojúhelník ABC existuje. Obraz bodu C v osové souměrnosti podle osy úsečky AB označíme D (obr. 6). Je-li $b = c$, je čtyřúhelník $ABCD$ čtverec. Potom je ABC pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník se shodnými odvěsnami AB a AC délky b a jeho konstrukce je zřejmá.



Obr. 6



Obr. 7

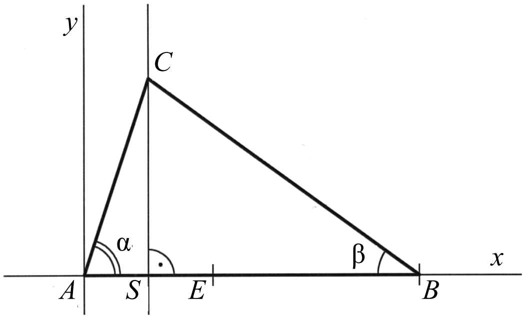
Pokud je $b \neq c$, je čtyřúhelník $ABDC$ rovnoramenný lichoběžník, jehož úhlopříčky jsou zároveň osami jeho vnitřních úhlů při vrcholech

A a B. Protože jsou úhly BAD a ADC shodné, jsou shodné i úhly CAD a ADC. Trojúhelník ACD je proto rovnoramenný se základnou AD a úsečky AC a CD jsou shodné. Úloha 2 pak souvisí s elementární úlohou, kdy máme sestrojit lichoběžník, u něhož známe délky všech čtyř stran ($|AB| = c$, $|BD| = |CD| = |AC| = b$). Proto obrázek doplníme o kosočtverec $B'BDC$.

Tyto úvahy nás opravňují ke konstrukci trojúhelníku ABC, je-li $b \neq c$ (obr. 7). Sestrojíme úsečku AB o délce c. Na polopřímce BA sestrojíme bod B' ve vzdálenosti b od bodu B. Sestrojíme kružnice k, resp. l, se středy A, resp. B' a poloměrech b. Jejich průsečíkem je vrchol C hledaného trojúhelníku ABC.

5. Analytické řešení úlohy 2

Šesté řešení úlohy 2. Předpokládejme, že existuje trojúhelník ABC, který vyhovuje podmínkám úlohy 2. Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic tak, že bod A leží v jejím počátku a bod B leží v kladné části osy x. Potom pro souřadnice bodů platí: $A[0;0]$, $B[c;0]$, souřadnice hledaného bodu C označíme i a j, tj. $C[i,j]$ (obr. 8).



Obr. 8

Pak platí

$$\cos\alpha = \frac{i}{b}, \quad \cos\beta = \frac{c-i}{\sqrt{(c-i)^2 + j^2}}.$$

Protože $\cos^2\beta = (1+\cos\alpha)/2$ a $i^2 + j^2 = b^2$, můžeme psát

$$\frac{(c-i)^2}{c^2 - 2ci + b^2} = \frac{b+i}{2b}.$$

Odtud vyplývá

$$2i^2 - (b+c)i + b(c-b) = 0.$$

Pro kořeny této rovnice platí

$$i_{1,2} = \frac{b + c \pm \sqrt{(b+c)^2 - 8b(c-b)}}{4} = \frac{b + c \pm \sqrt{9b^2 - 6bc + c^2}}{4}.$$

Bez ohledu na znaménko výrazu $3b - c$ je hledaná 1. souřadnice rovna některému z těchto dvou (ne nutně různých) čísel

$$i = \frac{b + c + (3b - c)}{4} = b \quad \text{nebo} \quad i = \frac{b + c - (3b - c)}{4} = \frac{c - b}{2}.$$

Protože $j \neq 0$ a dále $i^2 + j^2 = b^2$, musí být $|i| < b$. Proto je

$$i = \frac{c - b}{2}$$

Bod C tak leží na přímce o rovnici $x = \frac{1}{2}(c - b)$. Ta je kolmá k přímce AB (ose x) a protíná ji v bodě S o souřadnicích $[\frac{1}{2}(c - b), 0]$. Konstrukce trojúhelníka ABC je dále již zřejmá.

Odtud je patrné, že tento (v podstatě) mechanický výpočet odkryl řešení, ke němuž bychom jinak potřebovali jistý nápad a dávku geometrické představivosti (viz 4. a 5. řešení této úlohy). V tom lze spatřovat velkou sílu snahy nalézt řešení konstruktivní úlohy užitím jistého kalkulu tak, jak to na složitějších úlohách lze vidět např. v [1].

6. Závěr

Závěr plynoucí z výše uvedených úvah a řešení by mohl být následující. Pokud zařadíme příslušnou úlohu do určité oblasti matematiky (v našem případě do trigonometrie, planimetrie, analytická geometrie …), může se stát, že si uzavíráme cestu k jiným oblastem matematiky, které nám nabízejí podstatně jednodušší řešení. A to platí i o řešení úlohy 1. Vztah mezi řešeními úloh 1 a 2 není totiž pouze jednostranný ve smyslu, že řešení úlohy 1 může pomoci při řešení úlohy 2. Myšlenky vedoucí k řešení úlohy 2 metodami syntetické geometrie mohou také pomoci při nalezení elegantního řešení úlohy 1.

Druhé řešení úlohy 1. Uvažujme čtvrté řešení úlohy 2 (obr. 5). Z toho, co bylo výše uvedeno, je navíc patrné, že jsou trojúhelníky DBC a DCA

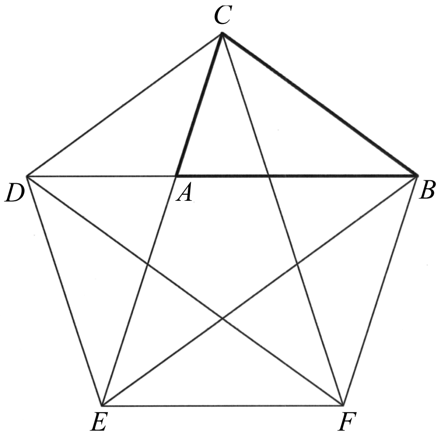
podobné. Proto platí

$$\frac{|DC|}{|DA|} = \frac{|DB|}{|DC|}, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{a}{b} = \frac{c+b}{a}.$$

Odtud

$$a = \sqrt{b(b+c)}.$$

Konečně jsme zcela pominuli další souvislosti řešené úlohy. Např. rovnoramenný trojúhelník ABC, ve kterém platí: $\alpha = 2\beta$, je částí pravidelného pětiúhelníku (viz obr. 9). Existuje zde tudíž i zřejmá souvislost se *zlatým řezem* (poměrem).



Obr. 9

L i t e r a t u r a

[1] *Kuřina, F.*: Deset pohledů na geometrii. MÚ AV ČR, Praha, 1996.

[2] *Zuščák, T.*: Jan Sobotka – inspirace po stu letech (disertační práce), Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha, 2008.

[3] *Sobotka, J.*: O některých relacích metrických a jejich užití k analytickému řešení problému Apollonického. ČPMF, roč. 41 (1912), s. 487-500.

[4] *Sobotka, J.*: Dodatky k analytickým úvahám o kružnicích a koulích Apolloniových a isogonálních. Rozpravy, roč. 21 (1912), č. 12.