Součet nekonečné řady aritmeticko-geometrické

EMIL CALDA

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Nekonečnou aritmeticko-geometrickou řadou nazýváme řadu

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_kb_k + \ldots,$$

jejíž člen a_kb_k je pro všechna přirozená čísla k součinem k-tého členu aritmetické posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ a k-tého členu posloupnosti geometrické $b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$

Jestliže aritmetická posloupnost má diferenci d a kvocient posloupnosti geometrické je q, pro k-tý člen aritmeticko-geometrické řady platí

$$a_kb_k = \Big(a_1 + (k{-}1)d\Big)b_1q^{k-1}.$$

Abychom odvodili součet s této nekonečné řady, určíme nejprve součet s_n jejích prvních n členů, a to pro $q \neq 1$:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_kb_k = \sum_{k=1}^{n}\Big(a_1 + (k-1)d\Big)b_1q^{k-1} = \\ &= a_1b_1\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} + b_1d\sum_{k=1}^{n}(k-1)q^{k-1} = \\ &= a_1b_1(1{-}q^n)/(1{-}q) + b_1d\sum_{k=0}^{n-1} kq^k. \end{aligned}$$

K určení součtu $\sum\limits_{k=0}^{n-1} kq^k$ utvoříme rozdíl $S{-}qS$, v němž použijeme rovnosti

$$\sum_{k=0}^{n-1} kq^k = \sum_{k=1}^{n-1} kq^k$$

$$qS = \sum_{k=0}^{n-1} = kq^{k+1} = \sum_{k=1}^{n}(k-1)q^k = \sum_{k=1}^{n-1}(k-1)q^k + (n-1)q^n,$$

takže

$$\begin{aligned} S - qS &= \sum_{k=1}^{n-1}\Big(kq^k - (k-1)q^k\Big) - (n-1)q^n = \\ &= \sum_{k-1}^{n-1} q^k - (n-1)q^n = \frac{q(1-q^{n-1})}{1-q} - q^n(n-1), \end{aligned}$$

odtud (za předpokladu $q \neq 1$) vypočteme

$$S = \frac{q(1-q^{n-1})}{(1-q)^2} - q^n(n-1)/(1-q).$$

Pro součet s_n prvních n členů aritmeticko-geometrické řady tak dostáváme:

$$s_n = a_1b_1(1-q^n)/(1-q) + b_1d[q(1-q^{n-1})/(1-q)^2 - q^n(n-1)/(1-q)].$$

Součet dané nekonečné řady získáme tak, že určíme limitu s_n pro n jdoucí do nekonečna:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = [a_1b_1/(1-q)] \lim_{n\to\infty}(1-q^n) + [b_1dq/(1-q)^2] \lim_{n\to\infty}(1-q^{n-1}) -$$
$$-[b_1d/(1-q)] \lim_{n\to\infty}(nq^n - q^n).$$

Vzhledem k tomu, že pro $|q| < 1$ platí jednak $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ (viz např. [1]), jednak $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$ (viz závěr tohoto článku), platí za předpokladu $|q| < 1$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = a_1b_1/(1-q) + b_1dq/(1-q)^2.$$

Odvodili jsme tak následující výsledek:

Věta 1

Pro součet s nekonečné aritmeticko-geometrické řady $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_kb_k + \ldots$ utvořené ze členů posloupnosti aritmetické (s prvním členem

a_1 a diferencí d) a geometrické (s prvním členem b_1 a kvocientem q, kde $|q| < 1$), platí

$$s = a_1 b_1/(1-q) + b_1 dq/(1-q)^2.$$

Jak jsme slíbili výše, ukážeme nyní, že pro $|q| < 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$. Za tímto účelem dokážeme nejprve větu:

Věta 2

Pro každou posloupnost (a_n) platí: Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Z předpokladu, že platí negace této věty, odvodíme spor. Nechť tedy existuje posloupnost (a_n), v níž $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$ a zároveň $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, je i $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$, takže lze použít větu o podílu limit

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n\to\infty} (|a_{n+1}|/|a_n|) = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}|/\lim_{n\to\infty} |a_n|.$$

Protože však $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}| = \lim_{n\to\infty} |a_n|$, je $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}|/\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$, což je ve sporu s tím, že tato limita je podle předpokladu menší než jedna; tím je daná věta dokázána. Jejím užitím snadno dokážeme, že pro všechna $|q| < 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$.

Protože pro $q = 0$ věta platí, budeme předpokládat, že je $|q| < 1$ a $q \neq 0$. Dostaneme tak

$$\lim_{n\to\infty} |(n+1)q^{n+1}/nq^n| = |q(n+1)/n| = \lim_{n\to\infty} |q(n+1)/n| = |q| < 1,$$

což podle výše uvedené věty znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$.

Autor doufá, že výše uvedené řádky poslouží k tomu, aby se nadaní studenti dověděli z matematiky více, než je na střední škole běžné.

Literatura

[1] *Odvárko, O.*: Matematika pro gymnázia, Posloupnosti a řady, Prometheus, Praha 1995.