Různé způsoby dokazování nerovností v geometrii

PAVEL PECH

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Rozvoj nových technologií ovlivňuje způsob výuky matematiky na školách různých typů a úrovní. Matematický software jako např. systémy dynamické geometrie (DGS) a systémy počítačové algebry (CAS) velmi významně zasahuje, kromě jiného, do problematiky dokazování matematických vět. Pomocí DGS můžeme provádět verifikaci a vizualizaci geometrických tvrzení. Jedná se o důkazové metody, které jsou založené na numerických výpočtech, a které ve své podstatě ani matematickými důkazy nejsou. Nicméně se ukazuje jejich užitečnost zejména ve výuce matematiky. Naproti tomu pomocí CAS, které jsou založeny na symbolických výpočtech, jsme schopni provádět exaktní matematické důkazy.

V tomto příspěvku ukážeme několik způsobů dokazování známé Weitzenböckovy nerovnosti – od verifikace v DGS, počítačového a klasického důkazu, po vizuální důkaz. Obzvláště vizuální důkaz je pak velmi efektní.

Věta 1 (Weitzenböckova nerovnost [7])

Je dán trojúhelník ABC se stranami délek a, b, c o obsahu P. Potom platí

$$a^2 + b^2 + c^2 \ - \ 4\sqrt{3}\ P \geq 0, \tag{1}$$

přičemž rovnost platí, právě když ABC je rovnostranný trojúhelník.

V příspěvku uvedeme následující čtyři různé důkazy (ověření) výše uvedené nerovnosti:

a) Verifikace pomocí dynamického softwaru,

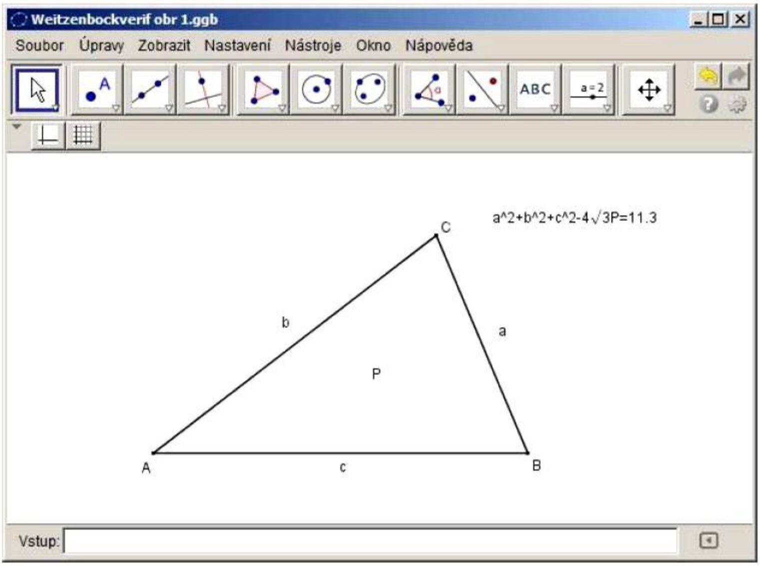
b) Automatický (počítačový) důkaz,

c) Klasický důkaz,

d) Vizuální důkaz.

ad a) *Verifikace pomocí dynamického softwaru* se provádí tak, že trojúhelník ABC nakresíme např. v programu GeoGebra a vyjádříme hodnotu levé strany nerovnosti (1), (obr. 1). Měníme-li tvar trojúhelníku ABC, hodnota levé strany (1) zůstává stále nezáporná.

Je zřejmé, že tuto metodu nelze brát jako matematický důkaz, i když lze říci, že s vysokou pravděpodobností tvrzení platí. Pro práci se studenty má však tato metoda kromě jiného především motivační význam.



Obr. 1 Verifikace v DGS

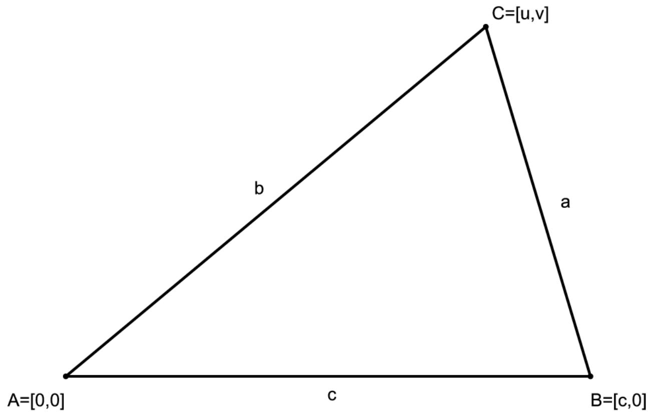
ad b) *Automatický (počítačový) důkaz* spočívá v analytickém vyjádření levé strany (1) ve tvaru polynomu a jeho následné úpravě na takový tvar, ze něhož je zřejmá jeho nezápornost.

Nejprve zavedeme kartézskou soustavu souřadnic tak, že vrcholy trojúhelníku ABC mají souřadnice $A = [0, 0]$, $B = [c, 0]$, $C = [u, v]$ (obr. 2). Dále vyjádříme délky stran a, b :

$$a = |BC| \Rightarrow (u - c)^2 + v^2 - a^2 = 0,$$

$$b = |CA| \Rightarrow u^2 + v^2 - b^2 = 0.$$

Pro obsah P trojúhelníku ABC pak platí $P - \frac{1}{2}cv = 0$.



Obr. 2 Automatický důkaz — zavedení soustavy souřadnic

Nyní vyjádříme levou stranu nerovnosti (1) pomocí shora uvedených vztahů. Platí

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}P = (u - c)^2 + v^2 + u^2 + v^2 + c^2 - 2\sqrt{3}cv.$$

Následující úpravou

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}P = 2\left(u - \frac{c}{2}\right)^2 + 2\left(v - \frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2 \tag{2}$$

vyjádříme nerovnost (1) na tvar, z něhož evidentně plyne dokazovaná nerovnost. Rovnost zde nastává, právě když platí $u = c/2$ a současně $v = c\sqrt{3}/2$, tj. právě když trojúhelník ABC je rovnostranný.

V obecném případě je „početní“ vyjádření polynomu na levé straně nerovnosti ve tvaru součtu druhých mocnin – podobně jako v případě (2) – prakticky nemožné. Proto hovoříme o automatickém nebo též počítačovém důkazu. Rozklad na součet druhých mocnin provede počítač (je-li to možné) za nás, viz např. [4], [5].

ad c) *Klasický důkaz* nerovnosti (1), který zde uvádíme, je založen na nerovnosti mezi aritmetickýcm a geometrickým průměrem (tzv. AG-nerovnost) a na známé Cauchy–Schwarzově nerovnosti.

Nejprve upravíme (1) s použitím Heronova vzorce na ekvivalentní tvar

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \;\geq\; 3(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c). \quad (3)$$

Nerovnost (1) budeme dokazovat ve tvaru (3).
Užití AG nerovnosti dává

$$3(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leq \frac{3}{27}(a+b+c)(a+b+c)^3$$

a tedy

$$3(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leq \frac{(a+b+c)^4}{9}.$$

Užitím Cauchy–Schwarzovy nerovnosti pak důkaz dokončíme

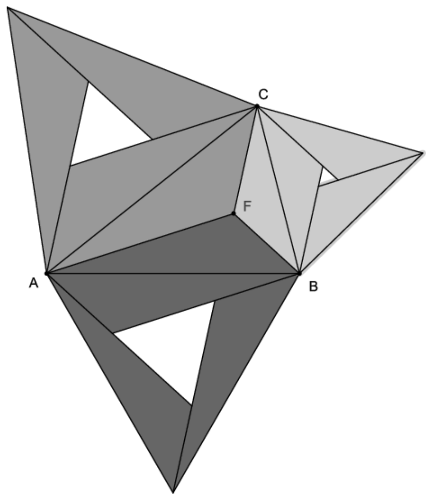
$$\frac{(a+b+c)^4}{9} = \left(\frac{(a+b+c)^2}{3}\right)^2 \leq \left(\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{3}\right)^2 = (a^2+b^2+c^2)^2. \quad (4)$$

Rovnost v (1) platí, právě když nastáne rovnost v (3) a (4). Taková situace nastane, právě když $a=b=c$, tj. právě když je trojúhelník ABC rovnostranný.

ad d) *Vizuální důkaz* spočívá ve vhodném geometrickém znázornění nerovnosti (1), z něhož plyne bezprostředně její důkaz. Takové typy důkazů jsou známy např. z publikace [3]. Pro důkaz naší nerovnosti je klíčové následující vyjádření nerovnosti (1) ve tvaru součtu obsahů rovnostranných trojúhelníků, které jsou vně sestrojeny nad stranami trojúhelníku ABC, přičemž budeme dokazovat ekvivalentí variantu dané nerovnosti, viz následující vztah.

$$a^2+b^2+c^2 \;\geq\; 4\sqrt{3}P \;\Leftrightarrow\; \frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{b^2\sqrt{3}}{4}+\frac{c^2\sqrt{3}}{4} \;\geq\; 3P.$$

Rozdělíme-li trojúhelník ABC na tři části s pomocí jeho Fermatova bodu[2] F. S přihlédnutím k rozdělení trojúhelníku ABC pomocí bodu F a rovněž vně připsaných rovnostranných trojúhelníků, dostaneme (obr. 3). Měníme-li tvar trojúhelníku ABC, je součet obsahů rovnostranných trojúhelníků sestrojených nad jeho stranami větší nebo roven $3P$. „Mezery" ve tvaru rovnostranných trojúhelníků „zmizí" pouze v případě, když je trojúhelník ABC rovnostranný, viz [1], [2]. Na adresách [1] nebo [2] lze nalézt obr. 3 v interaktivní podobě.



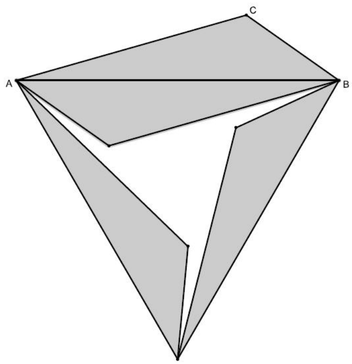
Obr. 3 Vizuální důkaz nerovnosti $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}P$

Pokud je trojúhelník ABC tupoúhlý s úhlem větším nebo rovným $120°$, obr. 3 situaci neřeší. Skutečně, označíme-li obsahy rovnostranných trojúhelníků nad stranami a, b, c trojúhelníku ABC postupně P_a, P_b a P_c, potom

$$P_a + P_b + P_c \ \geq \ P_c \ \geq \ 3P.$$

Nerovnost (1) je pro $n = 3$ speciálním případem následující nerovnosti, která náleží do třídy tzv. nerovností izoperimetrického typu.

[2]Fermatův bod je takový bod, z něhož vidíme všechny tři strany trojúhelníku ABC pod úhlem velikost $120°$.



Obr. 4 Vizuální důkaz (1) je-li jeden úhel větší nebo roven 120°

Věta 2

V rovině je dán n-úhelník $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se stranami délek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o obsahu P. Potom platí

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \;\geq\; 4 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} P \tag{5}$$

s rovností pro pravidelný n-úhelník.

Pro $n = 4$ má nerovnost (5) následující tvar

Věta 3

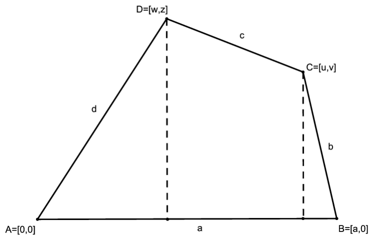
V rovině je dán čtyřúhelník $ABCD$ o stranách délek a, b, c, d o obsahu P. Potom platí

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 4P \;\geq\; 0, \tag{6}$$

přičemž rovnost nastane, právě když čtyřúhelník $ABCD$ je čtverec.

Při důkazu nerovnosti (6) můžeme postupovat stejně jako v případě trojúhelníku, kdy provedeme verifikaci v DGS, automatický důkaz, klasický důkaz a končeně i důkaz vizuální. Verifikaci v DGS a klasický důkaz nebudeme uvádět, čtenář si je snadno provede sám. Zde uvedeme pouze automatický a vizuální důkaz.

Automatický důkaz. Zavedeme pravoúhlou soustavu souřadnic tak, že vrcholy čtyřúhelníku $ABCD$ mají souřadnice $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [u, v]$, $D = [w, z]$,



Obr. 5 Automatický důkaz, případ $n = 4$

$$b = |BC| \Rightarrow (u-a)^2 + v^2 - b^2 = 0,$$
$$c = |CD| \Rightarrow (w-u)^2 + (z-v)^2 - c^2 = 0,$$
$$d = |DA| \Rightarrow w^2 + z^2 - d^2 = 0.$$

Pro obsah P čtyřúhelníku $ABCD$ dále platí $P - \frac{1}{2}(-va + vw - zu) = 0$, jak lze snadno odvodit, rozdělíme-li čtyřúhelník $ABCD$ na dva pravoúhlé trojúhelníky a lichoběžník, viz např. obr. 5 nebo (pro pokročilejší) obsah P získáme jako součet obsahů trojúhelníků ABC a ACD pomocí determinantů. Přepíšeme-li levou stranu nerovnosti (6) pomocí shora uvedených vztahů, dostaneme rovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 4P = \tag{7}$$

$$= a^2 + (u-a)^2 + v^2 + (w-u)^2 + (z-v)^2 + w^2 + z^2 + 2(-va + vw - zu),$$

kterou lze zapsat jako součet druhých mocnic následujícím způsobem

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 4P = \tag{8}$$

$$= (u-w-a)^2 + (v-a+w)^2 + (z-v)^2 + (z-u)^2.$$

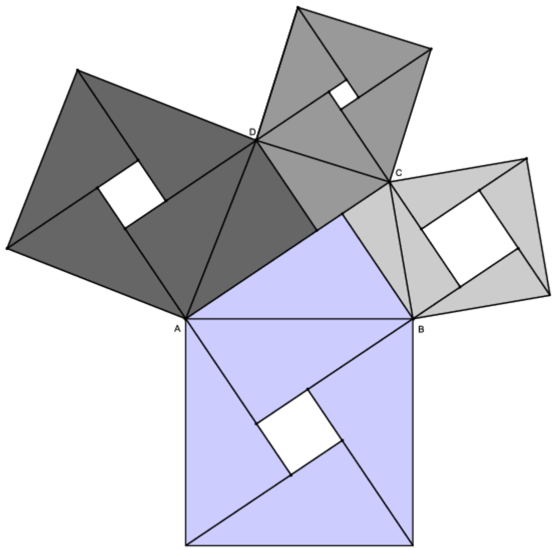
Z vyjádření (8) plyne nerovnost (6).[3] Rovnost zde nastává, právě když současně platí

$$u - w - a = 0,\ v - a + w = 0,\ z - v = 0,\ z - u = 0.$$

Odtud $u = v = z$ a $w = 0$, tj. právě když čtyřúhelník $ABCD$ je čtverec.

[3] Důkaz o nezápornosti pravé strany v rovnosti (7) dostaneme také pomocí programu tsds [8].

Vizuální důkaz vyžaduje více tvůrčí invence. Je uveden např. v [6] a je (podobně jako v případě trojúhelníka) velmi přesvědčivý. Čtyřúhelník $ABCD$ rozdělíme na čtyři části, viz obr. 5. Součet obsahů čtverců sestrojených nad stranami čtyřúhelníku $ABCD$ je vždy větší nebo roven $4P$. „Mezery“ ve tvaru čtverců „zmizí“, právě když $ABCD$ je čtverec, tj. právě když v (6) nastává rovnost.



Obr. 6 Vizuální důkaz nerovnosti $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4P$

Pro případy, kdy $n \geq 5$, je možno zkonstruovat vizuální důkaz jen pro některé speciální typy n-úhelníků. Např. pro pětiúhelník, v němž existuje bod, z něhož vidíme každou jeho stranu pod úhlem 72° lze vizuální důkaz, analogický případům $n = 3; 4$, provést. Konstrukce vizuálních důkazů pro libovolné n-úhelníky pro $n \geq 5$ však není známa.

Literatura

[1] *Alsina, C. – Nelsen, R.*: When less is more: Visualizing Basic Inequalities. MAA, Washington, 2009.

[2] http://www.cut-the-knot.org/geometry.shtml

[3] http://www.geogebratube.org/student/m30425
[4] *Nelsen, R.*: Proofs without words. MAA, Washington, 1993.
[5] *Parrilo, P. A.*: Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization. PhD. thesis. California Institute of Technology, Pasadena, California, 2000.
[6] *Pech, P.*: O jedné metodě dokazování geometrických nerovností. Matematika-fyzika-informatika 18 (2009), 452–458.
[7] *Weitzenböck, R.*: Math. Zeitschrift 5 (1919), 137–146.
[8] *Yang, L.*: Difference substitution and automated inequality proving. Journal of Guangzhou Univ., Natural Science Edition 5(2) (2006), 1–7.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojice úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 12. 2013 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 197

Dokažte, že pro libovolné liché číslo n je $20n^4 + 14n^2 + 2014$ dělitelné šestnácti.

Martin Panák

Úloha 198

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán vrchol A, průsečík výšek V a střed T_A strany BC. Přitom předpokládejme, že A, V, T_A jsou tři navzájem různé body.

Šárka Gergelitsová

Dále uvádíme řešení úloh 191 a 192, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním čísle tohoto (22.) ročníku našeho časopisu.