MATEMATIKA

Řešení soustav polynomických rovnic

JOSEF POLÁK

Fakulta aplikovaných věd ZČU v Plzni

Soustavy polynomických rovnic

Úvodem připomeňme, že v algebře na 2. stupni ZŠ se setkáváme s *elementárními metodami řešení soustav lineárních rovnic* (*dosazovací metodou a sčítací metodou*), které jsou objasňovány na jednoduchých příkladech soustav lineárních rovnic o dvou (výjimečně o třech) neznámých a jsou aplikovány na řešení slovních úloh. V algebře na SŠ se tato tematika prohlubuje a rozšiřuje i na soustavy lineárních rovnic o třech, popř. více neznámých. Přitom v současných středoškolských učebnicích elementární metody jejich řešení jsou rozšířeny o *Gaussovu eliminační metodu řešení soustav lineárních rovnic* (viz [5, s. 104–116]). Následně se v algebře a v analytické geometrii na SŠ řeší též jednoduché soustavy obsahující lineární a kvadratické rovnice o dvou neznámých. S obecnějšími případy řešení nelineárních soustav polynomických rovnic se lze často setkat v úlohách matematické olympiády (MO) u nás i v zahraničí, přičemž k jejich úspěšnému vyřešení je zpravidla potřebné tvůrčí uplatnění elementárních metod řešení.

V současné školní praxi je ovšem zároveň nutné si uvědomit, že učitelé i studenti mohou mít vcelku snadno k dispozici stále se rozvíjející použití digitálních technologií (programovatelných kalkulátorů, počítačů), jež umožňují relativně snadné řešení i velmi složitých soustav polynomických rovnic pomocí různých softwarových systémů (programů). Zejména to jsou široce rozšířené a dostupné systémy *Maple*, *Wolfram Alpha* aj. v soustavně zdokonalovaných verzích. Algoritmy řešení nelineárních soustav polynomických rovnic v nich jsou obvykle založeny na *eliminačních metodách* jejich řešení. Speciálním případem těchto metod, vhodným i pro ruční (nepočítačové) výpočty, je *metoda postupné eliminace* neznámých soustavy rovnic, která je založena na postupném snižování stupně rovnic vzhledem k jedné neznámé.

Cílem našeho článku je ukázat, že princip této metody lze vysvětlit jednoduše na středoškolské úrovni (bez použití pojmů abstraktní algebry) a ilustrovat její použití na příkladech řešení nelineárních soustav polynomických rovnic. Přitom zdůrazněme, že i když výhodou této metody je její obecnost (v jistých mezích) a možnost algoritmizace, pro speciální typy soustav rovnic (např. v úlohách MO) může být někdy jednodušší, popř. elegantnější užití alternativních elementárních způsobů řešení.

Poznámka 1. V současné české literatuře se lze často setkat s tím, že místo názvu polynomické rovnice je užíván termín *polynomiální rovnice*, který vznikl ne zcela vhodným překladem z angličtiny (angl. polynomial = čes. polynom, mnohočlen). Tradičně v naší literatuře byl v tomto významu používán název *algebraické rovnice*, jímž se ovšem v současnosti zejména v zahraniční literatuře obvykle rozumějí nejen polynomické rovnice, ale také rovnice s neznámými v lomených výrazech (racionálních lomených funkcích).

Soustava m polynomických rovnic o n neznámých v anulovaném tvaru se zapisuje takto:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

kde $f_1, f_2, \ldots, f_m$ jsou polynomy n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s reálnými, popř. komplexními koeficienty, tj. z číselného oboru $\mathbb{R}$, popř. $\mathbb{C}$. Zkráceně se soustava rovnic (1) zapisuje

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ \ldots,\ f_m = 0.$$

Proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se nazývají *neznámé soustavy rovnic* (1).

Množina všech polynomů n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s koeficienty z číselného oboru $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$, se značí symbolem $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, resp. $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Přitom, obdobně jako při zápisech polynomů jedné proměnné x, u nichž se využívá buď sestupné, anebo vzestupné pořadí členů (jednočlenů) podle jejich mocnitelů, také u polynomů n proměnných x_1, x_2, …, x_n je účelné přijmout úmluvu o pořadí (uspořádání) členů v zápisech polynomů. Obvykle se používá tzv. *lexikografické uspořádání na množině všech jednočlenů (monomů)* z množiny $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, resp. $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, viz např. [1] nebo [9].

Řešením soustavy rovnic (1) je nazývána každá uspořádaná n-tice čísel c_1, c_2, …, c_n z $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$, která jsou takovými hodnotami neznámých x_1, x_2, …, x_n, pro než platí všechny rovnice soustavy (1), tj. po jejichž dosazení za neznámé do těchto rovnic se dostávají platné rovnosti. Značí se $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Metody řešení soustav rovnic jsou založeny na použití jejich důsledkových a speciálně ekvivalentních úprav. *Důsledkové úpravy soustavy rovnic* jsou takové, u nichž upravená soustava rovnic má všechna řešení jako původní soustava a případně (u neekvivalentních úprav) některá řešení navíc, takže nutnou součástí procesu řešení je zkouška dosazením vypočtených hodnot řešení dodané soustavy rovnic. *Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic* jsou takové, u nichž upravená soustava rovnic má všechna řešení tatáž jako původní soustava rovnic a žádná další. Každé dvě soustavy rovnic, které mají právě tatáž řešení, se nazývají *ekvivalentní soustavy rovnic*.

V lineární algebře se zavádí významný pojem *lineární kombinace vektorů* (prvků vektorového prostoru). Speciálně jej lze užít pro polynomy s reálnými koeficienty: *Lineární kombinací polynomů* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ nazýváme výraz tvaru $k_1 f_1 + k_2 f_2 + \ldots + k_m f_m$, kde $k_1, k_2, \ldots, k_m$ jsou reálná čísla (prvky oboru $\mathbb{R}$).

Pro ekvivalentní úpravy soustav polynomických rovnic se pak formuluje a dokazuje následující věta (viz [8, 10]):

Věta 1

Dvě soustavy polynomických rovnic s reálnými koeficienty jsou ekvivalentní, jestliže jednu z nich dostaneme z druhé některou z těchto ekvivalentních úprav:

a) *Zaměníme pořadí rovnic v soustavě.*
b) *Vynásobíme některou rovnici soustavy nenulovým reálným číslem.*
c) *K některé rovnici soustavy přičteme lineární kombinaci ostatních rovnic soustavy (speciálně k-násobek jiné rovnice, kde $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).*
d) *Vynecháme rovnici soustavy, která je lineární kombinací ostatních rovnic soustavy.*
e) *Nahradíme některou rovnici soustavy lineární kombinací všech rovnic soustavy.*

Algebraickou kombinací polynomů f_1, f_2, ..., f_m proměnných x_1, x_2, ..., x_n nazýváme výraz tvaru

$$h_1 f_1 + h_2 f_2 + \ldots + h_m f_m,$$

kde h_1, h_2, ..., h_m jsou polynomy z množiny $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Užitím tohoto pojmu definujeme: *Algebraickou kombinací polynomických rovnic* $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, ..., $f_m = 0$ nazýváme polynomickou rovnici tvaru

$$h_1 f_1 + h_2 f_2 + \ldots + h_m f_m = 0,$$

kde koeficienty h_1, h_2, ..., h_m jsou polynomy z množiny $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Věta 2

Ekvivalentní úpravy soustav polynomických rovnic ve větě 1 můžeme rozšířit (*doplnit*) *o ekvivalentní úpravy* c), d), e), *v nichž místo lineárních kombinací rovnic soustavy vezmeme jejich algebraické kombinace.* (*Speciálně v bodě* c) *přičítáme h-násobek jiné rovnice, kde* $h \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.)

Dokažte například, že jsou ekvivalentní soustavy rovnic: $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ a $f_1(x, y) + h(x, y) \cdot f_2(x, y) = 0$ (kde $h(x, y)$ je libovolný polynom), $f_2(x, y) = 0$.

Elementární metody řešení soustav polynomických rovnic

Přehled elementárních metod řešení soustav rovnic viz v publikaci [11].

Uvedeme názvy a charakteristiky čtyř nejčastěji užívaných *eliminačních elementárních metod řešení soustav polynomických rovnic*:

Metoda sčítací (*adiční*) je založena na principu sečtení vhodně zvolených dvojic rovnic soustavy, resp. jejich násobků nenulovými reálnými čísly. (Speciálně při řešení soustav lineárních rovnic se na základě tohoto postupu přímo eliminuje jedna neznámá rovnic soustavy.)

Metoda dosazovací (*substituční ve významu substituce jako dosazení*) spočívá ve vyjádření jedné neznámé z některé rovnice soustavy a jejího dosazení do ostatních rovnic soustavy.

Metoda faktorizace (*rozkladu na součiny*) vychází z rozkladu polynomů soustavy rovnic na součiny lineárních polynomů.

Metoda „úplných čtverců“ je založena na doplnění kvadratických trojčlenů v dané soustavě rovnic, popř. v jejich součtech na „úplný čtverec“, tj. na druhou mocninu lineárního dvojčlenu.

Metoda substituce (*ve významu substituce jako záměny původních neznámých novými*) spočívá v použití vhodné transformace (záměny, náhrady) neznámých dané soustavy rovnic vhodně zvolenými novými neznámými.

Uvedené metody jsou užívány buď samostatně, anebo v kombinaci dvou nebo více z nich.

Princip metody postupné eliminace neznámých

Zopakujme, že *princip Gaussovy eliminační metody* (*GEM*) pro řešení soustavy n lineárních rovnic o n neznámých (viz např. [8, s. 273–275]) spočívá v postupném převedení dané soustavy lineárních rovnic ekvivalentními úpravami na ekvivalentní soustavu lineárních rovnic v tzv. *trojúhelníkovém tvaru*, kde ve druhé rovnici je eliminována první neznámá x_1, ve třetí rovnici navíc druhá neznámá x_2 atd., až v n-té rovnici jsou eliminovány všechny neznámé kromě n-té neznámé x_n.

Algoritmus GEM je rozdělen na tzv. *přímý chod* postupné eliminace neznámých a tzv. *zpětný chod* výpočtu hodnot neznámých na základě zpětné aplikace získané ekvivalentní soustavy rovnic v trojúhelníkovém tvaru.

Princip metody postupné eliminace neznámých pro řešení nelineární soustavy n polynomických rovnic o n neznámých (1) lze formulovat obdobně takto: Řešenou soustavu rovnic (1) při $m = n$ převedeme postupnými ekvivalentními úpravami na soustavu ekvivalentních polynomických rovnic v trojúhelníkovém tvaru:

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ g_2(x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ g_{n-1}(x_{n-1}, x_n) &= 0, \\ g_n(x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

kde g_1, g_2, …, g_{n-1}, g_n jsou polynomy uvedeného počtu proměnných. *Algoritmus MPE* opět rozdělujeme na *přímý chod* (postupnou eliminaci neznámých) a *zpětný chod* (výpočet jejich hledaných hodnot postupnou zpětnou aplikací získané ekvivalentní soustavy polynomických rovnic v trojúhelníkovém tvaru (2)).

Poznámka 2. Podobně jako je používáno standardní označení Gaussovy eliminační metody GEM, budeme používat také stručné označení metody postupné eliminace neznámých MPE. V jejím přímém chodu postupujeme obdobně jako v GEM, avšak podstatná odlišnost je v tom, že při ekvivalentních úpravách nelineární soustavy rovnic využíváme též algebraické kombinace polynomů a příslušných polynomických rovnic. Přitom tyto ekvivalentní úpravy jsou založeny na postupném snižování stupně rovnic vzhledem k jedné neznámé. Při zpětném chodu MPE vypočteme řešení soustavy rovnic (2) a tím i ekvivalentní původní soustavy rovnic (1) tak, že z rovnice $g_n = 0$ určíme hodnoty neznámé x_n, z rovnice $g_{n-1} = 0$ pak příslušné hodnoty neznámé x_{n-1}, atd. až z rovnice $g_1 = 0$ příslušné hodnoty neznámé x_1.

Poznámka 3. Při řešení nelineárních soustav polynomických rovnic pomocí počítačů se v používaných softwarových systémech (Mathematica, Maple, WolframAlpha aj.) vychází často nejen přímo z MPE, ale z obecnější *metody Gröbnerových bází* (systémů eliminačních polynomů) a *Buchbergerova algoritmu* pro jejich určování [1, 9]. Za autora této metody a algoritmu je považován rakouský matematik *Bruno Buchberger*, který je originálně formuloval s tvůrčím využitím pojmů abstraktní algebry v doktorské (Ph.D.) dizertační práci z roku 1965 a metodu jím objevenou pojmenoval na počest vedoucího své práce Wolfganga Gröbnera. V následujících letech byl Buchbergerův algoritmus zdokonalován a modifikován nejen samotným autorem, ale též dalšími matematiky. Termín „báze" tu má ovšem jiný význam než v analytické geometrii a Buchbergerův algoritmus je určen pro počítačové využití, takže ruční výpočty pomocí něho jsou zpravidla velmi náročné až prakticky nerealizovatelné. Vzhledem k tomu a zejména též proto, že objasnění této metody a algoritmu vyžaduje porozumění mnoha náročným pojmům abstraktní algebry (překračujícím značně rámec středoškolské matematiky), je velmi těžko realizovatelné a předčasné seznámení s nimi talentovaných středoškolských studentů (účastníků MO) podle představ vyjádřených v příspěvku [4] inspirovaném článkem [3]. Z věcného i didaktického hlediska je podstatně jednodušší a přirozenější, aby se tito studenti seznámili na středoškolské úrovni s užitím MPE a získali tak mj. vhodnou motivaci pro pozdější (vysokoškolské) studium pojmů abstraktní a počítačové algebry.

Příklady řešení soustav nelineárních polynomických rovnic metodou postupné eliminace

V prvním ilustrativním příkladu vyřešíme užitím MPE soustavu polynomických rovnic z [6, s. 247–248].

Příklad 1

V oboru komplexních čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 2x &= -1, \\ x^2 + y^2 - 2y &= -1. \end{aligned}$$

Řešení. Danou soustavu rovnic vyjádříme v anulovaném tvaru (1):

$$\begin{aligned} f_1 &= x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0, \\ f_2 &= x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice eliminujeme x^2 tak, že od ní odečteme rovnici druhou. Dostáváme ekvivalentní soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} f_2 &= x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0, \\ f_3 &= f_1 - f_2 = x - y^2 + y = 0. \end{aligned}$$

Eliminaci x^2 v rovnici $f_2 = 0$ docílíme tím, že od ní odečteme x-násobek rovnice $f_3 = 0$. Získáme ekvivalentní soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} f_3 &= x - y^2 + y = 0, \\ f_4 &= f_2 - xf_3 = x(y^2 - y) + y^2 - 2y + 1 = 0. \end{aligned}$$

Z rovnice $f_4 = 0$ eliminujeme x odečtením $(y^2 - y)$-násobku rovnice $f_3 = 0$, čímž po úpravě dostáváme rovnici

$$f_5 = f_4 - (y^2 - y)f_3 = (y - 1)^2(y^2 + 1) = 0.$$

Závěrem tak dospíváme k ekvivalentní soustavě rovnic trojúhelníkového tvaru (2):

$$\begin{aligned} g_1 &= f_3 = x - y^2 + y = 0, \\ g_2 &= f_5 = (y - 1)^2(y^2 + 1) = 0. \end{aligned}$$

Rovnice $g_2 = 0$ má v oboru $\mathbb{C}$ kořeny $y_1 = 1$, $y_2 = \mathrm{i}$, $y_3 = -\mathrm{i}$, k nimž dopočteme z rovnice $g_1 = 0$ příslušné hodnoty: $x_1 = 0$, $x_2 = -1 - \mathrm{i}$, $x_3 = -1 - \mathrm{i}$. Daná ekvivalentní soustava rovnic má tedy v oboru $\mathbb{C}$ právě tři řešení: $(0; 1)$, $(-1 - \mathrm{i}; \mathrm{i})$, $(-1 + \mathrm{i}; -\mathrm{i})$.

V příkladu 2 budeme řešit užitím MPE soustavu polynomických rovnic z publikace [4], v níž byla řešena metodou Gröbnerových bází užitím Buchbergerova algoritmu.

Příklad 2

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2,\\ x + 2y - z &= -4,\\ x^2 + y^2 + z^2 &= 12. \end{aligned}$$

Řešení. Řešenou soustavu rovnic vyjádříme opět v anulovaném tvaru (1):

$$\begin{aligned} f_1 &= x + y + z - 2 = 0,\\ f_2 &= x + 2y - z + 4 = 0,\\ f_3 &= x^2 + y^2 + z^2 - 12 = 0. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice této soustavy eliminujeme neznámou x tím, že od ní odečteme rovnici první. Dostaneme rovnici

$$f_4 = f_2 - f_1 = y - 2z + 6 = 0.$$

Dále ze třetí rovnice této soustavy eliminujeme x^2 tak, že od této rovnice odečteme x-násobek první rovnice, čímž vznikne rovnice

$$f_5 = f_3 - xf_1 = x(-y - z + 2) + y^2 + z^2 - 12 = 0.$$

Z ní eliminujeme neznámou y dosazením z rovnice $f_4 = 0$: $y = 2z - 6$. Získáme tak rovnici pro jedinou neznámou z, kterou upravíme do tvaru:

$$f_6 = 7z^2 - 36z + 44 = 0$$

Daná soustava rovnic je ekvivalentní se soustavou rovnic v trojúhelníkovém tvaru (2):

$$\begin{aligned} g_1 &= f_1 = x + y + z - 2 = 0,\\ g_2 &= f_4 = y - 2z + 6 = 0,\\ g_3 &= f_6 = 7z^2 - 36z + 44 = 0. \end{aligned}$$

Kvadratická rovnice $g_3 = 0$ má kořeny: $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{22}{7}$, k nimž dopočteme z rovnice $g_2 = 0$: $y_1 = -2$, $y_2 = \frac{2}{7}$ a z rovnice $g_1 = 0$: $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{10}{7}$. Daná ekvivalentní soustavu rovnic má tedy právě 2 řešení: $(2; -2; 2)$, $\left(-\frac{10}{7}; \frac{2}{7}; \frac{22}{7}\right)$.

Poznámka 4. V následujících příkladech 3, 4 a také v příkladu 8 budeme řešit soustavy polynomických rovnic speciálního typu, tzv. *cyklické soustavy polynomických rovnic*, jež se vyskytují často v úlohách MO. Jejich charakteristickou vlastností je, že z každé rovnice této soustavy dostáváme ostatní její rovnice cyklickou záměnou neznámých. Odtud pak zřejmě plyne: Je-li uspořádaná n-tice $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ řešením cyklické soustavy rovnic, potom také každá cyklická permutace jejích prvků je řešením této soustavy rovnic.

V příkladu 3 vyřešíme užitím MPE soustavu polynomických rovnic, která byla řešena v oboru reálných čísel v [11, s. 10–12] elementárními metodami, mj. dosazovací metodou a kombinací adiční metody s metodou faktorizace.

Příklad 3

Řešte v oboru komplexních čísel soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 2y, \\ y^2 + 1 &= 2x. \end{aligned}$$

Řešení. Danou soustavu rovnic vyjádříme v anulovaném tvaru (1):

$$\begin{aligned} f_1 &= x^2 - 2y + 1 = 0, \\ f_2 &= 2x - y^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Nejprve eliminujeme v první rovnici x^2 tak, že ji vynásobíme dvěma a odečteme od ní x-násobek druhé rovnice, čímž dostáváme rovnici

$$f_3 = 2f_1 - xf_2 = x(y^2 + 1) - 4y + 2 = 0.$$

Z této rovnice eliminujeme neznámou x tím, že od jejího dvojnásobku odečteme $(y^2 + 1)$-násobek rovnice $f_2 = 0$. Získáme tak rovnici s jedinou neznámou y:

$$f_4 = 2f_3 - (y^2 + 1)f_2 = y^4 + 2y^2 - 8y + 5 = 0.$$

Daná soustava rovnic je ekvivalentní se soustavou rovnic v trojúhelníkovém tvaru (2):

$$\begin{aligned} g_1 &= f_2 = 2x - y^2 - 1 = 0, \\ g_2 &= f_4 = y^4 + 2y^2 - 8y + 5 = 0. \end{aligned}$$

Rovnice $g_2 = 0$ má dvojnásobný kořen $y_{1,2} = 1$ a lze ji proto upravit na součinový tvar:
$$(y-1)^2(y^2+2y+5) = 0.$$
Kvadratická rovnice $y^2 + 2y + 5 = 0$ má záporný diskriminant $D = -16$, a tedy imaginární kořeny $y_{3,4} = -1 \pm 2\mathrm{i}$. Z rovnice $g_1 = 0$ dopočteme příslušné hodnoty: $x_{1,2} = 1$, $x_{3,4} = -1 \mp 2\mathrm{i}$. Daná ekvivalentní soustava rovnic má tedy v oboru komplexních čísel právě 3 řešení: $(1; 1)$, $(-1+2\mathrm{i}; -1-2\mathrm{i})$, $(-1-2\mathrm{i}; -1+2\mathrm{i})$.

V příkladu 4 budeme řešit užitím MPE soustavu rovnic z knihy [1, s. 115–116], v níž byla řešena metodou Gröbnerových bází.

Příklad 4

Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic
$$\begin{aligned} x^2+y+z &= 1,\\ x+y^2+z &= 1,\\ x+y+z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Řešení. Řešenou soustavu rovnic vyjádříme po záměně jejich pořadí v anulovaném tvaru (1):
$$\begin{aligned} f_1 &= x+y+z^2-1 = 0,\\ f_2 &= x+y^2+z-1 = 0,\\ f_3 &= x^2+y+z-1 = 0. \end{aligned}$$
Z druhé rovnice eliminujeme neznámou x odečtením první rovnice, čímž dostáváme rovnici
$$f_4 = f_2 - f_1 = y^2 - y - z^2 + z = 0.$$
Z třetí rovnice eliminujeme x^2 dosazením z první rovnice $x = -y - z^2 + 1$, což vede na rovnici
$$f_5 = y^2 + 2yz^2 - y + z^4 - 2z^2 + z = 0.$$
Odečtením rovnice $f_4 = 0$ od ní eliminujeme v ní y^2 a dostáváme rovnici
$$f_6 = f_5 - f_4 = 2yz^2 + z^4 - z^2 = z^2(2y + z^2 - 1) = 0.$$

Tato rovnice v součinovém tvaru je splněna, je-li $z^2 = 0$ nebo

$$f_7 = 2y + z^2 - 1 = 0, \quad \text{čili} \;\; y = \frac{1}{2}(1 - z^2).$$

Rovnice $z^2 = 0$ má dvojnásobný kořen $z_{1,2} = 0$, k němuž vypočteme příslušné hodnoty y z rovnice $f_5 = 0$, která pro $z = 0$ má tvar $y^2 - y = 0$ čili $y(y-1) = 0$, a tedy kořeny $y_1 = 0$ a $y_2 = 1$. Příslušné hodnoty x určíme z rovnice $f_1 = 0$ ve tvaru $x + y - 1 = 0$ čili $x = -y + 1$: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.

Pro $z \neq 0$ dosadíme $y = \frac{1}{2}(1 - z^2)$ do rovnice $f_4 = 0$ a odtud po úpravách vyplývá rovnice pro neznámou z

$$f_8 = z^4 - 4z^2 + 4z - 1 = 0,$$

kterou lze vyjádřit v součinovém tvaru

$$f_8 = (z-1)^2(z^2 + 2z - 1) = 0.$$

Daná soustava rovnic je tedy pro $z \neq 0$ ekvivalentní se soustavou rovnic v trojúhelníkovém tvaru (2):

$$\begin{aligned} g_1 &= f_1 = x + y + z^2 - 1 = 0, \\ g_2 &= f_7 = 2y + z^2 - 1 = 0, \\ g_3 &= f_8 = (z-1)^2(z^2 + 2z - 1) = 0. \end{aligned}$$

Rovnice $(z-1)^2 = 0$ má dvojnásobný kořen $z_3 = 1$, k němuž vypočteme příslušné hodnoty y a z z rovnic $g_2 = 0$ a $g_1 = 0$: $y_3 = 0$, $x_3 = 0$. Kvadratická rovnice $z^2 + 2z - 1 = 0$ má diskriminant $D = 8$ a kořeny $z_{4,5} = -1 \pm \sqrt{2}$. Příslušné hodnoty y a x opět dopočteme z rovnic $g_2 = 0$ a $g_1 = 0$: $y_{4,5} = x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{2}$.

Daná ekvivalentní soustava rovnic má tedy právě 5 řešení: $(1;0;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;1)$, $(-1+\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}; -1+\sqrt{2})$, $(-1-\sqrt{2}; -1-\sqrt{2}; -1-\sqrt{2})$.

Poznámka 5. V příkladech 5 a 6 budeme řešit užitím MPE další speciální typy soustav polynomických rovnic, tzv. *symetrické soustavy polynomických rovnic*. Jsou to takové soustavy rovnic (1), v nichž f_1, f_2, …, f_m jsou *symetrické polynomy*, tj. polynomy proměnných x_1, x_2, …, x_n, jež se nemění při libovolné záměně pořadí (permutaci) proměnných. Zřejmě proto pro ně platí: Je-li uspořádaná n-tice $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ řešením symetrické soustavy rovnic, pak také každá permutace prvků c_1, c_2, …, c_n je rovněž řešením této soustavy rovnic.

V příkladu 5 vyřešíme ilustrativně užitím MPE dvě soustavy jednoduchých rovnic z rovinné analytické geometrie.

Příklad 5

V oboru reálných čísel řešte soustavy rovnic

a)

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 25, \\ xy &= 12, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} xy &= 1, \\ x+y &= -1. \end{aligned}$$

Řešení.

a) Řešenou soustavu rovnic vyjádříme v anulovaném tvaru (1):

$$\begin{aligned} f_1 &= xy-12=0, \\ f_2 &= x^2+y^2-25=0. \end{aligned}$$

Z první rovnice vyplývá: $x \neq 0$, $y = \frac{12}{x}$. Po dosazení do druhé rovnice z ní eliminujeme y^2 a dostáváme rovnici pro neznámou x:

$$f_3 = x^4-25x^2+144=0.$$

Daná soustava rovnic je ekvivalentní se soustavou rovnic v trojúhelníkovém tvaru (2):

$$\begin{aligned} g_1 &= f_1 = xy-12=0, \\ g_2 &= f_3 = x^4-25x^2+144=0. \end{aligned}$$

Bikvadratickou rovnici $g_2=0$ převedeme substitucí $u=x^2$ na kvadratickou rovnici $u^2-25u+144=0$, která má diskriminant $D=49$ a kořeny $u_1=16$, $u_2=9$. Užitím zpětné substituce $x=\pm\sqrt{u}$ dostáváme kořeny rovnice $g_2=0$: $x_1=4$, $x_2=-4$, $x_3=3$, $x_4=-3$, k nimž dopočteme y užitím rovnice $g_1=0$ čili $y=\frac{12}{x}$: $y_1=3$, $y_2=-3$, $y_3=4$, $y_4=-4$.

Ekvivalentní soustava rovnic má tedy právě 4 řešení: $(4;3)$, $(-4;-3)$, $(3;4)$, $(-3;-4)$.

b) Řešenou soustavu rovnic upravíme na ekvivalentní anulovaný tvar (1):

$$\begin{aligned} f_1 &= x+y+1=0, \\ f_2 &= xy-1=0. \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme $x = -y-1$ a dosazením do druhé rovnice v ní eliminujeme neznámou x a dostáváme kvadratickou rovnici pro neznámou y:

$$f_3 = y^2 + y + 1 = 0.$$

Daná soustava rovnic je ekvivalentní se soustavou rovnic v trojúhelníkovém tvaru (2):

$$\begin{aligned} g_1 &= f_1 = x + y + 1 = 0, \\ g_2 &= f_3 = y^2 + y + 1 = 0. \end{aligned}$$

Avšak kvadratická rovnice $g_2 = 0$ má záporný diskriminant $D = -3$ a je tedy neřešitelná v oboru $\mathbb{R}$, takže daná ekvivalentní soustava rovnic nemá žádné řešení v oboru reálných čísel.

V příkladu 6 budeme řešit užitím MPE složitější symetrickou soustavu tří polynomických rovnic inspirovanou sbírkou náročnějších úloh z elementární matematiky [7].

Příklad 6

V oboru komplexních čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 2, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 3. \end{aligned}$$

Řešení. Vyjádříme řešenou soustavu rovnic v anulovaném tvaru (1):

$$\begin{aligned} f_1 &= x + y + z - 1 = 0, \\ f_2 &= x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0, \\ f_3 &= x^3 + y^3 + z^3 - 3 = 0. \end{aligned}$$

V druhé rovnici této soustavy nejprve eliminujeme x^2 tak, že od ní odečteme x-násobek první rovnice. Po úpravě dostáváme rovnici

$$f_4 = f_2 - xf_1 = x(1 - y - z) + y^2 + z^2 - 2 = 0.$$

Z této rovnice pak eliminujeme neznámou x tím, že od ní odečteme $(1 - y - z)$-násobek první rovnice, což vede k rovnici

$$f_5 = f_4 - (1 - y - z)f_1 = 2y^2 + 2z^2 + 2yz - 2y - 2z - 1 = 0.$$

Po jejím vydělení dvěma a po úpravě získáváme rovnici

$$f_6 = \frac{1}{2} f_5 = y^2 + y(z-1) + z^2 - z - \frac{1}{2} = 0.$$

Z rovnice $f_3 = 0$ můžeme jednoduše odvodit rovnici obsahující pouze neznámou z pomocí vhodného použití vzorců:

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}\Big[(x+y)^2 - \big(x^2+y^2\big)\Big], \\
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \Rightarrow x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y).
\end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice $f_3 = 0$ nabývá tato rovnice tvaru

$$(x+y)^3 - \frac{3}{2}\Big[(x+y)^2 - \big(x^2+y^2\big)\Big](x+y) + z^3 - 3 = 0.$$

Přitom z rovnice $f_1 = 0$ vyplývá, že $x + y = 1 - z$ a z rovnice $f_2 = 0$ po provedených úpravách dospíváme k rovnici

$$f_7 = 3z^3 - 3z^2 - \frac{3}{2}z - \frac{1}{2} = 0.$$

Vydělením třemi ji upravíme na tvar

$$f_8 = \frac{1}{3} f_7 = z^3 - z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{6} = 0.$$

Získali jsem tak ekvivalentní soustavu rovnic v trojúhelníkovém tvaru (2):

$$\begin{aligned}
g_1 &= f_1 = x + y + z - 1 = 0, \\
g_2 &= f_6 = y^2 + y(z-1) + z^2 - z - \frac{1}{2} = 0, \\
g_3 &= f_8 = z^3 - z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{6} = 0.
\end{aligned}$$

Kubickou rovnici $g_3 = 0$ převedeme substitucí $z = t + \frac{1}{3}$ do redukovaného tvaru $t^3 - \frac{5}{6}t - \frac{11}{27} = 0$ s koeficienty $p = -\frac{5}{6}$, $q = -\frac{11}{27}$. Protože je tedy $D = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} > 0 \Rightarrow$ kubická rovnice má jeden reálný kořen a dva komplexně sdružené kořeny. Přibližnou hodnotu reálného kořene z_1 rovnice $g_3 = 0$ určíme některou z numerických metod, nejsnáze výpočtem pomocí počítačového softwaru: $z_1 \doteq 1{,}431$. Rovnici $g_3 = 0$ lze pak vyjádřit v součinovém tvaru

$$(z - z_1)\left[z^2 - (z_1 - 1)z + \frac{1}{6z_1}\right] = 0$$

a komplexně sdružené kořeny z_2, z_3 vypočteme řešením kvadratické rovnice $z^2 - (z_1 - 1)z + \frac{1}{6z_1} = 0$ s diskriminantem $D_2 = (z_1 - 1)^2 - \frac{2}{3z_1} < 0$: $z_{2,3} \doteq -0{,}215 \pm 0{,}265\,\mathrm{i}$. Příslušné hodnoty y a x pak můžeme vypočítat z rovnic $g_2 = 0$ a $g_1 = 0$. Jednodušší je však vyjít z toho, že řešená soustava rovnic je symetrická, a tedy má právě 6 řešení, jež jsou všemi permutacemi právě jednoho z nich: (z_3, z_2, z_1).

V příkladu 7 ukážeme, jak užitím MPE lze snadno vyřešit soustavu polynomických rovnic z článku [2], ve kterém byla řešena podstatně složitěji metodou Gröbnerových bází.

Příklad 7

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x^3 + xy - x + y^3 &= -1,\\ x^2y - xy + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Řešení. Danou soustavu polynomických rovnic vyjádříme z anulovaného tvaru

$$\begin{aligned} f_1 &= 2x^3 + xy - x + y^3 + 1 = 0,\\ f_2 &= x^2y - xy + y^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice eliminujeme nejprve x^3 tak, že od jejího y-násobku odečteme $2x$-násobek rovnice druhé. Dostáváme tím po úpravě rovnici

$$f_3 = yf_1 - 2xf_2 = 2x^2y - xy^2 - xy + 2x + y^4 + y = 0.$$

Odtud dále vyloučíme x^2 jejím odečtením od dvojnásobku druhé rovnice, získáme po úpravě rovnici

$$f_4 = 2f_2 - f_3 = x(y^2 - y - 2) - (y^4 - 2y^2 + y + 2) = 0,$$

kde

$$\begin{aligned} y^2 - y - 2 &= (y + 1)(y - 2),\\ y^4 - 2y^2 + y + 2 &= (y + 1)(y^3 - y^2 - y + 2). \end{aligned}$$

Pro $y \neq -1$ a $y \neq 2$ vyplývá z rovnice $f_4 = 0$:

$$x = \frac{y^3 - y^2 - y + 2}{y - 2}$$

a po dosazení do rovnice $f_2 = 0$ dospíváme po úpravách k rovnici:

$$f_5 = y^7 - 2y^6 - 2y^5 + 10y^4 - 8y^3 - 5y^2 + 12y - 4 = 0.$$

Rovnice $f_1 = 0$ je ekvivalentní s rovnicí

$$f_6 = (y + 1) f_5.$$

Dospěli jsme tak k soustavě rovnic v trojúhelníkovém tvaru (2), která je ekvivalentní s danou soustavou rovnic:

$$\begin{aligned} g_1 &= f_2 = x^2 y - xy + y^2 - 1 = 0, \\ g_2 &= f_6 = y^8 - y^7 - 4y^6 + 8y^5 + 2y^4 - 13y^3 + 7y^2 + 8y - 4 = 0. \end{aligned}$$

Rovnice $g_2 = 0$ má kořen $y_1 = -1$, k němuž dopočteme x z rovnice $g_1 = 0$:

$$(g_1 = 0) \Rightarrow \big((x_1 = 0) \vee (x_1 = 1)\big).$$

Další reálné kořeny rovnice $g_2 = 0$ můžeme určit užitím numerických metod, nejjednodušeji pomocí počítačového softwaru (např. WolframAlpha či Maple): $y_2 \doteq 0{,}447$, $y_3 \doteq -1{,}105$, $y_4 \doteq -1{,}935$. K nim příslušejí hodnoty: $x_2 \doteq -0{,}929$, $x_3 \doteq -0{,}171$, $x_4 \doteq 1{,}791$. Daná soustava rovnic má tedy v oboru reálných čísel právě 5 řešení: $(0; -1)$, $(1; -1)$, (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4). (V oboru komplexních čísel má další čtyři řešení.)

Poznámka 6. V příkladech 8 a 9 ukážeme alternativní možnost užití MPE pro řešení soustav polynomických rovnic v úlohách matematické olympiády z 61. ročníku (2011/2012) a 71. ročníku (2021/2022). Při odkazech použijeme standardní označení úloh MO.

Následující příklad vyřešíme užitím MPE.

Příklad 8 (61. MO, A–S–1)

V oboru reálných čísel řešte cyklickou soustavu rovnic

$$\begin{aligned} y + 3x &= 4x^3, \\ x + 3y &= 4y^3. \end{aligned}$$

Řešení. Daná soustava rovnic má triviální řešení $(x_0, y_0) = (0; 0)$. Dále ji pro $y \neq 0$ vyjádříme v anulovaném tvaru

$$\begin{aligned} f_1 &= 4x^3 - 3x - y = 0, \\ f_2 &= x - 4y^3 + 3y = 0. \end{aligned}$$

Z rovnice $f_1 = 0$ eliminujeme neznámou x nejjednodušeji tak, že z rovnice $f_2 = 0$ dosadíme $x = 4y^3 - 3y$. Po úpravách dostáváme rovnici

$$f_3 = 256y^9 - 576y^7 + 432y^5 - 120y^3 + 8y = 0$$

a po vydělení osmi rovnici

$$f_4 = \frac{1}{8} f_3 = 32y^9 - 72y^7 + 54y^5 - 15y^3 + y = 0,$$

která je pro $y \neq 0$ ekvivalentní s rovnicí

$$f_5 = 32y^8 - 72y^6 + 54^4 - 15y^2 + 1 = 0.$$

Získali jsme tak (za předpokladu $y \neq 0$) ekvivalentní soustavu rovnic v trojúhelníkovém tvaru (2):

$$\begin{aligned} g_1 &= f_2 = x - 4y^3 + 3y = 0, \\ g_2 &= f_5 = 32y^8 - 72y^6 + 54y^4 - 15y^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Rovnice $g_2 = 0$ má zřejmé kořeny $y_1 = 1$, $y_2 = -1$ (dělitelé absolutního členu polynomu g_2). Součinem kořenových činitelů $(y+1)(y-1) = y^2 - 1$ vydělíme polynom g_2, čímž dostaneme vyjádření rovnice $g_2 = 0$ v součinovém tvaru

$$(y^2 - 1)(32y^6 - 40y^4 + 14y^2 - 1) = 0.$$

Další kořeny rovnice $g_2 = 0$ tedy určíme vyřešením rovnice

$$32y^6 - 40y^4 + 14y^2 - 1 = 0.$$

Použijeme k tomu substituci $2y^2 = t$, jíž po úpravě získáme kubickou rovnici ve tvaru

$$4t^3 - 10t^2 + 7t - 1 = 0.$$

Jedním z kořenů této rovnice je dělitel jejího absolutního členu $t_1 = 1$ a k němu zpětnou substitucí vypočteme příslušné hodnoty neznámé y:

$y_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Dále můžeme vydělit polynom $4t^3 - 10t^2 + 7t - 1$ kořenovým činitelem $t-1$ a na základě získaného podílu $4t^2 - 6t + 1$ přepsat kubickou rovnici pro t v součinovém tvaru

$$(t-1)(4t^2 - 6t + 1) = 0.$$

Zbývá vyřešit kvadratickou rovnici $4t^2 - 6t + 1 = 0$, jež má diskriminant $D = 20$, a tedy kořeny $t_{2,3} = \frac{1}{4}(3 \pm \sqrt{5})$. Zpětnou substitucí získáváme příslušné hodnoty neznámé y ve tvaru $y_i = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{3 \pm \sqrt{5}}$ $(i = 5, 6, 7, 8)$, který lze zjednodušit užitím vzorce odvozeného v [8, s. 91], podle něhož je $\sqrt{3 \pm \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5} \pm 1)$, a tedy $y_i = \pm\frac{1}{4}(\sqrt{5} \pm 1)$. Dopočtením příslušných hodnot x z rovnice $g_1 = 0$ dospíváme k výsledku, že daná soustava rovnic má právě 9 řešení:
$(0;0), (1;1), (-1;-1), \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}; \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}\right),$
$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}; \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}\right), \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}; -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}\right), \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}; -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}\right).$

Poslední příklad vyřešíme nejen pomocí MPE, ale pro porovnání uvedeme též standardní postup jeho řešení užitím elementární metody faktorizace.

Příklad 9 (71. MO, A–I–4)

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} xy + 1 &= z^2, \\ yz + 2 &= x^2, \\ zx + 3 &= y^2. \end{aligned}$$

Řešení. Řešenou soustavu upravíme na anulovaný tvar (1):

$$\begin{aligned} f_1 &= xy - z^2 + 1 = 0, \\ f_2 &= x^2 - yz - 2 = 0, \\ f_3 &= xz - y^2 + 3 = 0. \end{aligned}$$

Z rovnice $f_1 = 0$ eliminujeme člen s neznámou x tak, že od jejího z-násobku odečteme y-násobek rovnice $f_3 = 0$. Dostáváme rovnici

$$f_4 = y^3 - 3y - z^3 + z = 0.$$

Dále z rovnic $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ odvodíme dvěma způsoby lineární rovnice s neznámými x, y, z:

$$\begin{aligned} f_5 &= xf_1 - yf_2 + zf_3 = x + 2y + 3z = 0, \\ f_6 &= yf_1 - zf_2 + xf_3 = 3x + y + 2z = 0 \end{aligned}$$

a odtud plyne rovnice

$$f_7 = 3f_5 - f_6 = 5y + 7z = 0.$$

Z této rovnice dosadíme $y = -\frac{7}{5}z$ do rovnice $f_4 = 0$, čímž z ní eliminujeme neznámou y a pro neznámou z získáme po provedení úprav rovnici

$$f_8 = z^2 - \frac{25}{18} = 0.$$

Dospěli jsem k ekvivalentní soustavě rovnic v trojúhelníkovém tvaru (2):

$$\begin{aligned} g_1 &= f_5 = x + 2y + 3z = 0, \\ g_2 &= f_7 = 5y + 7z = 0, \\ g_3 &= f_8 = z^2 - \frac{25}{18} = 0. \end{aligned}$$

Odtud vypočteme:

$$g_3 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \pm\frac{5\sqrt{2}}{6},\ g_2 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \mp\frac{7\sqrt{2}}{6},\ g_1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \mp\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Daná soustava rovnic má tedy právě dvě řešení:

$$\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{6}; -\tfrac{7\sqrt{2}}{6}; \tfrac{5\sqrt{2}}{6}\right),\ \left(\tfrac{\sqrt{2}}{6}; \tfrac{7\sqrt{2}}{6}; -\tfrac{5\sqrt{2}}{6}\right).$$

Řešení metodou faktorizace. V řešené soustavě rovnic v daném (neanulovaném) tvaru odečteme od 1. rovnice 2. rovnici a od 2. rovnice 3. rovnici. Dostáváme tak dvojici rovnic

$$\begin{aligned} xy - yz - 1 &= z^2 - x^2, \\ yz - zx - 1 &= x^2 - y^2, \end{aligned}$$

jež upravíme na součinové tvary

$$\begin{aligned} (x - z)(x + y + z) &= 1, \\ (y - x)(x + y + z) &= 1. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $x+y+z \neq 0$ a $x-z = y-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(y+z)$, takže hodnoty neznámých x_i, y_i, z_i, pro které je splněna daná soustava rovnic, jsou tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti x_i, $y_i = x_i \pm d$, $z_i = x_i \mp d$, kde d je její diference. Po dosazení do dané soustavy rovnic a úpravě získaných rovnic z nich vyplývá, že $x_i = \frac{d^2-1}{3d}$, resp. $x_i = \frac{3-d^2}{3d}$ a $d^2 = 2 \Rightarrow d = \pm\sqrt{2}$, a tedy $y_i = x_i \pm d = \pm\frac{7\sqrt{2}}{6}$, $z_i = x_i \mp d = \mp\frac{5\sqrt{2}}{6}$. Dospíváme tedy k témuž výsledku jako při řešení užitím MPE.

Druhý způsob řešení jsme připojili proto, abychom ukázali, že řešení soustavy rovnic MPE má sice výhodu pro svou obecnost použití, ovšem nemusí být nejvýhodnějším z hlediska jednoduchosti postupu řešení.

Závěr

Při řešení nelineárních soustav polynomických rovnic s využitím digitálních technologií jsou mnohé softwary (programy) založeny na principu metody postupné eliminace neznámých. V našem článku jsme ukázali a na příkladech ilustrovali, jak lze princip MPE vysvětlit na středoškolské úrovni bez použití pojmů a metod abstraktní algebry. Tento výklad je vhodný a užitečný z didaktického hlediska, ale může být také ve vysokoškolském studiu motivačním zdrojem pro zavedení některých pojmů abstraktní algebry, popř. algebraické geometrie i při odvozování na nich založených metod a algoritmů počítačové algebry.

Literatura

[1] *Cox, D., Little, J., O'Shea, D.*: Ideals, Varietizs, and Algorithms. Third Edition, Springer, New York, 2007.

[2] *Ernestová, M.*: Soustavy algebraických rovnic. Učitel matematiky, roč. 10 (2002), č. 4, s. 193–203.

[3] *Heck, A.*: A Bird's-Eye View of Gröbner Bases. CAN Expertise Center, Amsterdam, 1996.

[4] *Hora, J.*: O některých otázkách souvisejících s využíváním programů počítačové algebry ve škole – II. díl. Pedagogické centrum, Plzeň, 1998.

[5] *Charvát, J., Zhouf, J., Boček, L.*: Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice. Dotisk 3. vydání, Prometheus, Praha, 2002.

[6] *Jarník, J., Šisler, M.*: Jak řešit rovnice a jejich soustavy. SNTL, Praha, 1961.

[7] *Lidskij, V. B. a kol*: Úlohy z elementární matematiky. SPN, Praha, 1965, (překlad z ruského originálu).

[8] *Polák, J.*: Přehled středoškolské matematiky. Dotisk 10. vydání, Prometheus, Praha, 2019.

[9] *Stanovský, D., Barto, L.*: Počítačová algebra. MatfyzPress, Praha, 2017.

[10] *Svätokrižny, P., Dlouhý, Z., Hruša, K.*: Aritmetika a algebra pre pedagogické fakulty – II. diel Algebra. SPN, Bratislava, 1978.

[11] *Švrček, J.*: Systems of equations and methods of their solving. Vydavatelství UP, Olomouc, 2019.