O jedné nerovnosti z polské MO

JÓZEF KALINOWSKI

Slezská univerzita, Katowice, POLSKO

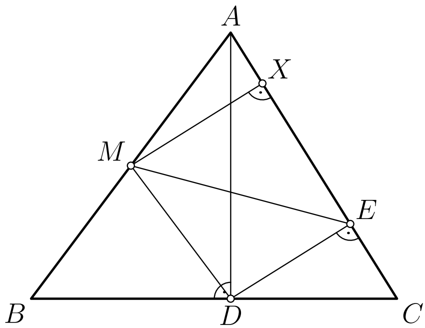
V tomto příspěvku uvádíme tři odlišná řešení jedné geometrické nerovnosti z I. kola aktuálního – 73. ročníku (2021/2022) polské MO – příklad 8, viz [1]. Při koordinaci úloh I. kola v katowickém regionu, na níž se podílel autor článku, se objevily různé žákovské přístupy lišící se podstatným způsobem od oficiálního řešení uvedené úlohy. První dvě prezentovaná řešení, s nimiž se mohou čtenáři seznámit, jsou ryze geometrická, třetí řešení se opírá o základní prostředky analytické geometrie.

Text úlohy

Je dán trojúhelník ABC. Nechť D je pata výšky z vrcholu A a E je pata kolmice z bodu D k přímce AC. Označme M střed jeho strany AB. Dokažte, že platí $\sqrt{2} \cdot |ME| \leq |AB|$.

Poznámka. V případě prvních dvou prezentovaných řešení této úlohy budeme uvažovat případ, kdy pata výšky z vrcholu A v trojúhelníku ABC je bodem jeho strany BC. V opačném případě lze důkaz dané nerovnosti vést zcela analogicky.

Řešení. Označme X patu kolmice z bodu M k přímce AC (v případě, kdy vnitřní úhel při vrcholu A daného trojúhelníku ABC je pravý, je $X = A$).



Obr. 1

V pravoúhlém lichoběžníku $DEXM$ tak platí

$$|XE| \le |MD| = \frac{1}{2}|AB|$$

a podobně v pravoúhlém trojúhelníku MXA je $|MX| \le |MA|$. Konečně, v pravoúhlém trojúhelníku BDA (popř. v jeho degenerované verzi) platí

$$|MA| = |MD| = \frac{1}{2}|AB|,$$

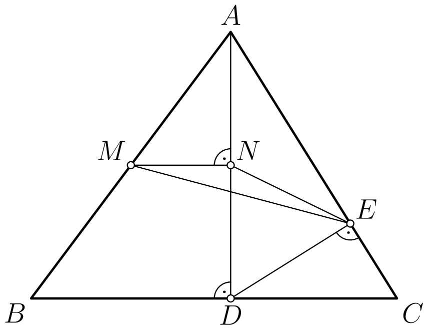
viz obr. 1. Užitím Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku EXM (obr. 1) dostaneme

$$|ME|^2 = |MX|^2 + |EX|^2 \le |MA|^2 + |MD|^2 = \\ = \frac{1}{4}|AB|^2 + \frac{1}{4}|AB|^2 = \frac{1}{2}|AB|^2,$$

což po snadné úpravě dává přímo kýženou nerovnost.

Rovnost zde (s ohledem na použité nerovnosti) nastane, právě když trojúhelník ABC je pravoúhlý rovnoramenný, s pravým úhlem při vrcholu A.

Jiné řešení. Označme N střed úsečky (výšky) AD. Pak MN je střední příčka v trojúhelníku ABD, přičemž platí $|MN| = \frac{1}{2}|BD|$.



Obr. 2

V pravoúhlém trojúhelníku ADE je N středem jeho přepony, tj. středem Thaletovy kružnice s průměrem AD, tudíž platí $|NE| = \frac{1}{2}|AD|$. Užitím trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku MEN dále obdržíme

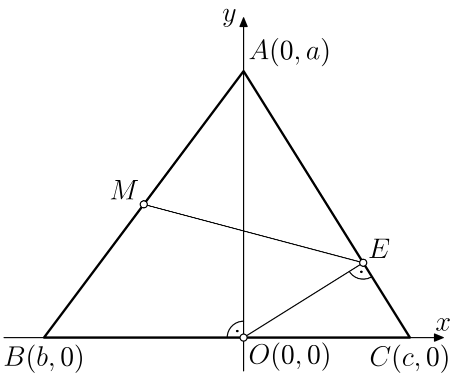
$$|ME| \le |MN| + |NE| = \frac{|AD| + |BD|}{2}.$$

Aplikací nerovnosti mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem pro $|BD|$ a $|AD|$ a dále Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku ABD (obr. 2) dostaneme

$$|ME| \leq \frac{|BD| + |AD|}{2} \leq \sqrt{\frac{|AD|^2 + |BD|^2}{2}} = \sqrt{\frac{|AB|^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|AB|,$$

což po snadné úpravě opět dává žádanou nerovnost.

Jiné řešení. Trojúhelník ABC umístíme do kartézské souřadnicové soustavy Oxy tak, že $A(0,a)$, $a > 0$ a aby vrcholy B a C ležely na ose x (obr. 3), tj. $B(b,0)$, $C(c,0)$, kde b a c jsou reálná čísla. Počátek souřadnicové soustavy $O(0,0)$ je totožný s patou D výšky z vrcholu A.



Obr. 3

Rovnice přímky AC je pak

$$ax + cy = ac$$

a kolmice k AC, která prochází počátkem, tj. bodem $O(0,0)$, má rovnici

$$cx - ay = 0.$$

Průsečíkem těchto přímek je bod E, jehož souřadnice x, y vyhovují soustavě dvou lineárních rovnic

$$\begin{aligned} ax + cy &= ac, \\ cx - ay &= 0. \end{aligned}$$

Jejím řešením dostaneme

$$x = \frac{a^2c}{a^2+c^2}, \qquad y = \frac{ac^2}{a^2+c^2}.$$

Střed M strany AB má souřadnice $(\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}a)$, viz obr. 3. Odtud plyne

$$|ME|^2 = \left(\frac{b}{2} - \frac{a^2c}{a^2+c^2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{ac^2}{a^2+c^2}\right)^2.$$

Danou nerovnost

$$\sqrt{2}\cdot|ME| \leq |AB|$$

lze pak po snadné úpravě zapsat ve tvaru

$$2\left[\left(\frac{b}{2} - \frac{a^2c}{a^2+c^2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{ac^2}{a^2+c^2}\right)^2\right] \leq a^2+b^2,$$

což po úpravě dává

$$2\left(\frac{a^4c^2}{(a^2+c^2)^2} + \frac{a^2c^4}{(a^2+c^2)^2} - \frac{a^2c^2}{a^2+c^2}\right) \leq \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{2a^2bc}{a^2+c^2}. \tag{1}$$

Nyní dokážeme nerovnost (1) pro libovolná reálná čísla a, b, c, tj. pro uvedené souřadnice bodů A, B, C. Nerovnost (1) nejprve upravíme do tvaru

$$2\left(\frac{a^2c^2(a^2+c^2)}{(a^2+c^2)^2} - \frac{a^2c^2}{a^2+c^2}\right) \leq \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{2a^2bc}{a^2+c^2},$$

který dále upravíme

$$0 = 2\left(\frac{a^2c^2}{a^2+c^2} - \frac{a^2c^2}{a^2+c^2}\right) \leq \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{2a^2bc}{a^2+c^2},$$

tj.

$$\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{2a^2bc}{a^2+c^2} \geq 0,$$

resp.

$$(a^2+c^2)b^2 + 4a^2bc + (a^2+c^2)a^2 \geq 0. \tag{2}$$

Tuto nerovnost nyní dokážeme následujícími dvěma způsoby:

(i) Levou stranu nerovnosti (2) roznásobíme a upravíme do tvaru evidentně platné nerovnosti

$$(a^2 + bc)^2 + a^2(b + c)^2 \geq 0,$$

čímž je důkaz dané geometrické nerovnosti uzavřen.

Z poslední nerovnosti je rovněž patrné, kdy v dané nerovnosti nastane rovnost. Nechť (kromě $a > 0$) je $c > 0$, viz obr. 3. Pak ale pro reálná čísla a, b a c musí platit $b = -c < 0$ a současně

$$a^2 + bc = a^2 - c^2 = 0,$$

tj. $a = c$, což ale znamená, že rovnost v (2) nastane, právě když trojúhelník ABC je pravoúhlý rovnoramenný, s pravým úhlem při vrcholu A.

(ii) Na levou stranu nerovnosti (2) lze pohlížet jako na kvadratický polynom s reálnou proměnnou b, s reálnými parametry a, c. Vzhledem k tomu, že pro diskriminant D této kvadratické funkce platí

$$D = -4a^2(a^4 - 2a^2c^2 + c^4) = -4a^2(a^2 - c^2)^2 \leq 0,$$

je nerovnost (2) splněna pro všechna reálná čísla a, b, c, což jsme chtěli dokázat.

I při tomto důkazu nerovnosti (2) snadno zjistíme, že rovnost zde nastane, právě když trojúhelník ABC je pravoúhlý rovnoramenný, s pravým úhlem při vrcholu A.

Z polského originálu psaného pro časopis Matematika–fyzika–informatika přeložil a upravil *Jaroslav Švrček*.

Literatura

[1] Sprawozdanie Komitetu Głównego, Warszawa, 2022, dostupné z: http://www.om.mimuw.edu.pl