[3] http://www.geogebratube.org/student/m30425
[4] *Nelsen, R.*: Proofs without words. MAA, Washington, 1993.
[5] *Parrilo, P. A.*: Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization. PhD. thesis. California Institute of Technology, Pasadena, California, 2000.
[6] *Pech, P.*: O jedné metodě dokazování geometrických nerovností. Matematika-fyzika-informatika 18 (2009), 452–458.
[7] *Weitzenböck, R.*: Math. Zeitschrift 5 (1919), 137–146.
[8] *Yang, L.*: Difference substitution and automated inequality proving. Journal of Guangzhou Univ., Natural Science Edition 5(2) (2006), 1–7.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojice úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 12. 2013 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 197

Dokažte, že pro libovolné liché číslo n je $20n^4 + 14n^2 + 2014$ dělitelné šestnácti.

Martin Panák

Úloha 198

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán vrchol A, průsečík výšek V a střed T_A strany BC. Přitom předpokládejme, že A, V, T_A jsou tři navzájem různé body.

Šárka Gergelitsová

Dále uvádíme řešení úloh 191 a 192, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním čísle tohoto (22.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 191

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= 3e,\\ (b+c+s)^3 &= 3a,\\ (c+d+e)^3 &= 3b,\\ (d+e+a)^3 &= 3c,\\ (e+a+b)^3 &= 3d.\end{aligned}$$

Jaroslav Švrček

Řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a = \max\{a, b, c, d, e\}$. Potom $3e \leq 3a$. Z první a druhé rovnice dané soustavy plyne

$$(a+b+c)^3 = 3e \leq 3a = (b+c+d)^3.$$

Odtud dostaneme $a + b + c \leq b + c + d$, tedy $a \leq d$. Proto $a = d = \max\{a, b, c, d, e\}$. Ze čtvrté a páté rovnice soustavy stejným způsobem dostaneme $d = b$. Ze druhé a třetí rovnice dále získáme $b = e$ a nakonec z první a poslední rovnice $c = e$. Proto $a = b = c = d = e$.

Dosazením $a = b = c = d = e$ do libovolné rovnice dané soustavy dostaneme $(3a)^3 = 3a$. Tato rovnice má tři reálné kořeny $a \in \{-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\}$. Řešením dané soustavy rovnic jsou tedy tři uspořádané pětice reálných čísel

$$(a, b, c, d, e) \in \left\{ \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right), (0; 0; 0; 0; 0), \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) \right\}.$$

Zkouška při tomto postupu není nutná.

Správné řešení zaslali *Jozef Mészáros* z Jelky a *Martin Raszyk* z G v Karviné. Neúplné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Anton Hnáth* z Moravan.

Úloha 192

Najděte všechny dvojice obdélníků s celočíselnými délkami stran v mm takových, že jeden má délku o 4 mm větší než šířku, druhý má délku o 32 mm větší než šířku a přitom mají stejné obsahy.

Jaroslav Zhouf

Řešení. Označme a, b celočíselné délky kratších stran obou obdélníků v mm. Z rovnosti obsahů obou obdélníků plyne

$$a(a+4) = b(b+32).$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$(-a+b+14)(a+b+18) = 252 \ (= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7).$$

Druhý činitel na levé straně této rovnice je přirozené číslo. První činitel proto musí být proto celé nezáporné číslo, které je současně menší než druhý činitel. Dále snadno zjistíme, že oba činitelé na levé straně rovnice mají stejnou paritu. Těmto podmínkám vyhovují pouze rozklady čísla 252 na součin činitelů, které jsou uvedeny v následující tabulce:

$-a+b+14$	2	6	14
$a+b+18$	126	42	18
$2a+4$	124	36	4
a	60	16	0
b	48	8	0

Čísla a, b jsou obě přirozená pouze v prvních dvou případech. Existují tedy dvě dvojice obdélníků vyhovující podmínkám úlohy. První dvojici tvoří obdélníky 60 mm × 64 mm a 48 mm × 80 mm, druhou dvojici obdélníky 16 mm × 20 mm a 8 mm × 40 mm.

Správné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Vladimír Pavel* z Blovic a *Martin Raszyk* z G v Karviné. Neúplné řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy.