Tři speciální body ležící na jedné přímce III

JAROSLAV ZHOUF

FIT ČVUT, Praha

V tomto článku navazujeme na příspěvky [4, 5]. Budeme zde prezentovat další zajímavé trojice bodů, které leží na téže přímce. Stejně jako v [5] se budeme v řešeních úloh zásadním způsobem opírat o dvě věty – větu Menelaovu a větu Cèvovu. Obě tyto věty může čtenář nalézt např. v [1, 3] nebo [5].

Společným úkolem u všech šesti uvedených příkladů bude dokázat platnost jejich tvrzení.

Příklad 1

Na stranách AB, BC, CA trojúhelníku ABC jsou postupně zvoleny body C_1, A_1, B_1 různé od vrcholů A, B, C. Předpokládejme, že přímky AB a A_1B_1 nejsou rovnoběžné a označme C_2 jejich průsečík. Obdobně předpokládejme, že A_2 je průsečík přímek BC a B_1C_1 a B_2 je průsečík přímek AC a A_1C_1. Jestliže procházejí přímky AA_1, BB_1, CC_1 jedním bodem, pak leží body A_2, B_2, C_2 na jedné přímce.

Řešení. Podle Menelaovy věty pro trojúhelník ABC a přímku C_2A_1 platí (obr. 1)

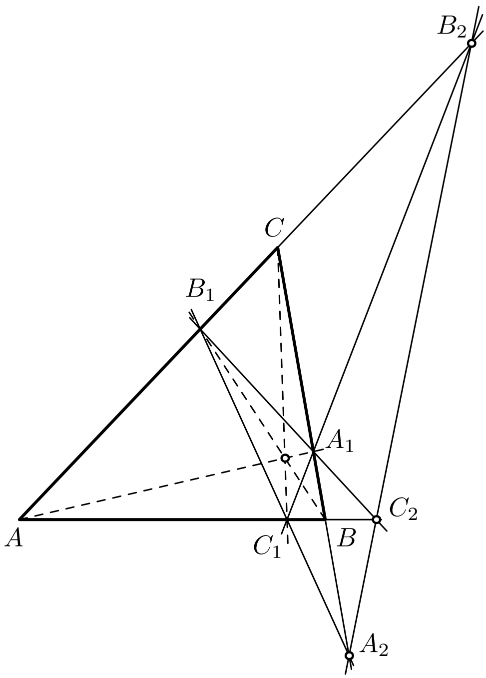
$$\frac{|AC_2|}{|BC_2|} \cdot \frac{|BA_1|}{|CA_1|} \cdot \frac{|CB_1|}{|AB_1|} = 1.$$

Analogicky pro trojúhelník ABC a přímky A_2B_1 a B_2C_1 platí

$$\frac{|AC_1|}{|BC_1|} \cdot \frac{|BA_2|}{|CA_2|} \cdot \frac{|CB_1|}{|AB_1|} = 1, \qquad \frac{|AC_1|}{|BC_1|} \cdot \frac{|BA_1|}{|CA_1|} \cdot \frac{|CB_2|}{|AB_2|} = 1.$$

Dvojím použitím Cèvovy věty pro trojúhelník ABC a přímky AA_1, BB_1, CC_1 obdržíme

$$\frac{|BC_1|}{|AC_1|} \cdot \frac{|CA_1|}{|BA_1|} \cdot \frac{|AB_1|}{|CB_1|} = 1, \qquad \frac{|BC_1|}{|AC_1|} \cdot \frac{|CA_1|}{|BA_1|} \cdot \frac{|AB_1|}{|CB_1|} = 1.$$



Obr. 1

Nyní všech pět uvedených rovností vynásobíme a dostaneme rovnost

$$\frac{|AC_2|}{|BC_2|} \cdot \frac{|BA_2|}{|CA_2|} \cdot \frac{|CB_2|}{|AB_2|} = 1,$$

což vyjadřuje podle Menelaovy věty pro trojúhelník ABC, že body A_2, B_2, C_2 leží na jedné přímce.

Příklad 2

Pro trojúhelník ABC a přímku p, která protíná přímky AB, BC, CA postupně v bodech K, L, M a neprochází žádným vrcholem trojúhelníku ABC, platí, že středy P, Q, R úseček KC, AL, BM leží na téže přímce.

Řešení. Označme A_1, B_1, C_1 postupně středy stran BC, CA, AB (obr. 2). Přímka, na níž leží body B_1, A_1, P, je rovnoběžná s přímkou AB. Analogicky je přímka, na níž leží body B_1, C_1, Q, rovnoběžná s přímkou BC a přímka, na níž leží body C_1, A_1, R, rovnoběžná s přímkou AC.

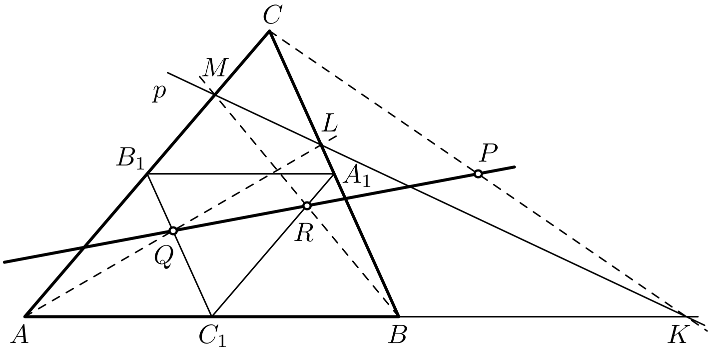
Umístíme přímku p například tak, že protne strany BC, CA uvnitř a třetí bod leží vně strany AB; pro ostatní polohy přímky p jsou úvahy stejné. Podle Menelaovy věty pro trojúhelník ABC a přímku p postupně platí

$$\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1,$$

$$\frac{2\,|B_1P|}{2\,|A_1P|} \cdot \frac{2\,|C_1Q|}{2\,|B_1Q|} \cdot \frac{2\,|A_1R|}{2\,|C_1R|} = 1,$$

$$\frac{|B_1P|}{|A_1P|} \cdot \frac{|C_1Q|}{|B_1Q|} \cdot \frac{|A_1R|}{|C_1R|} = 1.$$

Poslední uvedená rovnost představuje tvrzení Menelaovy věty pro trojúhelník $A_1B_1C_1$ a přímku, na níž leží body P, Q, R. Znamená to tedy, že body P, Q, R leží na jedné přímce.



Obr. 2

Příklad 3 (van Aubelova věta)

Bodem R, který leží uvnitř trojúhelníku ABC, jsou vedeny přímky AR, BR, CR protínající strany trojúhelníku postupně v bodech L, M, K, jak ukazuje obr. 3. V takovém případě platí rovnost

$$\frac{|AR|}{|LR|} = \frac{|AK|}{|BK|} + \frac{|AM|}{|CM|}.$$

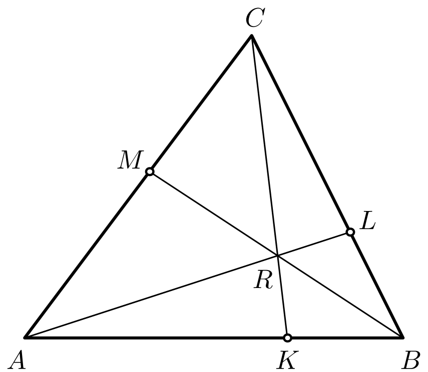
Řešení. Zapišme rovnost z Cèvovy věty pro trojúhelník ABC a bod R a rovnost z Menelaovy věty pro trojúhelník ABL a přímku CK, tedy rovnosti

$$\frac{|AK|}{|BK|}\cdot\frac{|BL|}{|CL|}\cdot\frac{|CM|}{|AM|}=1,\qquad \frac{|AK|}{|BK|}\cdot\frac{|BC|}{|LC|}\cdot\frac{|LR|}{|AR|}=1.$$

Odtud plynou rovnosti

$$\frac{|AR|}{|LR|}=\frac{|BC|}{|BL|}\cdot\frac{|AM|}{|CM|}=\frac{|CL|+|BL|}{|BL|}\cdot\frac{|AM|}{|CM|}=$$
$$=\frac{|CL|}{|BL|}\cdot\frac{|AM|}{|CM|}+\frac{|AM|}{|CM|}=\frac{|AK|}{|BK|}+\frac{|AM|}{|CM|}.$$

V poslední rovnosti jsme opět využili rovnost z Cèvovy věty pro trojúhelník ABC a bod R.



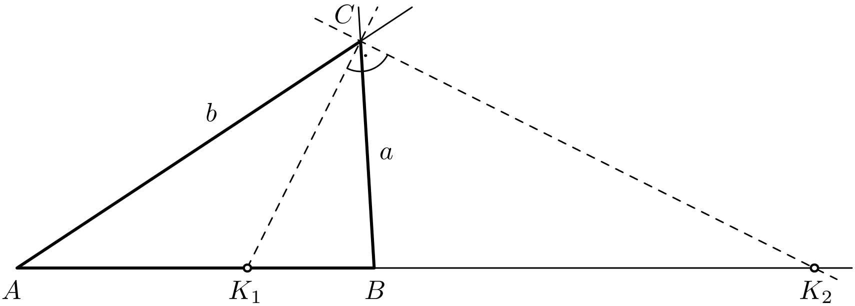
Obr. 3

K důkazu dalšího příkladu uvedeme pomocnou větu.

Lemma

V trojúhelníku ABC, jehož délky stran jsou označeny obvyklým způsobem a, b, c $(a \neq b)$, protne osa vnitřního úhlu při vrcholu C přímku AB v bodě K_1 a osa vnějšího úhlu v bodě K_2 (obr. 4). Platí tyto rovnosti

$$\frac{|BK_1|}{|AK_1|}=\frac{a}{b},\qquad \frac{|BK_2|}{|AK_2|}=\frac{a}{b}.$$



Obr. 4

Důkaz. První rovnost dokážeme pomocí sinové věty pro trojúhelníky BK_1C a AK_1C ve tvaru

$$\frac{|BK_1|}{|BC|} = \frac{\sin(|\sphericalangle BCK_1|)}{\sin(|\sphericalangle BK_1C|)} = \frac{\sin(|\sphericalangle ACK_1|)}{\sin(|\sphericalangle AK_1C|)} = \frac{|AK_1|}{|AC|},$$

$$\frac{|BK_1|}{|AK_1|} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{b}.$$

Druhou rovnost dokážeme pomocí sinové věty pro trojúhelníky BK_2C a AK_2C ve tvaru

$$\frac{|BK_2|}{|BC|} = \frac{\sin(|\sphericalangle BCK_2|)}{\sin(|\sphericalangle BK_2C|)} = \frac{\sin(|\sphericalangle K_1CK_2| - |\sphericalangle BCK_1|)}{\sin(|\sphericalangle BK_2C|)} =$$

$$= \frac{\sin(|\sphericalangle K_1CK_2| + |\sphericalangle ACK_1|)}{\sin(|\sphericalangle BK_2C|)} = \frac{\sin(|\sphericalangle ACK_2|)}{\sin(|\sphericalangle AK_2C|)} = \frac{|AK_2|}{|AC|},$$

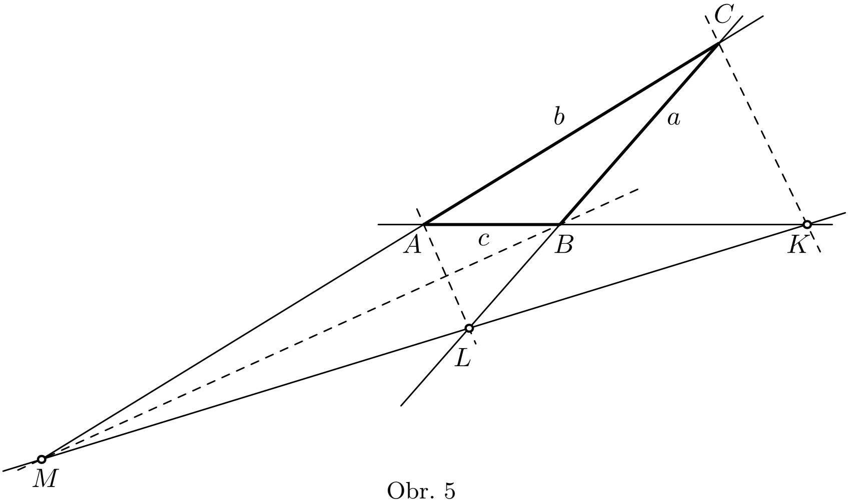
$$\frac{|BK_2|}{|AK_2|} = \frac{a}{b}.$$

Příklad 4

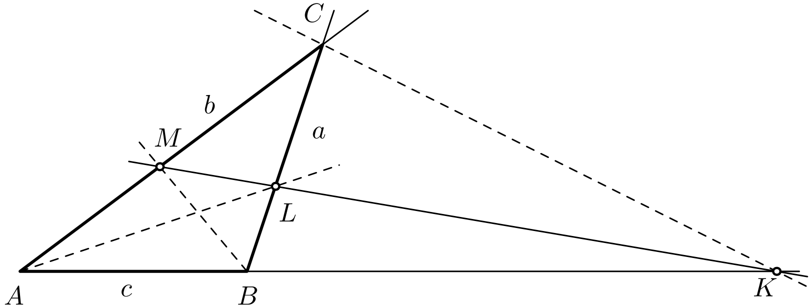
Tři body K, L, M leží na jedné přímce, jestliže

a) bod K je průsečíkem osy vnějšího úhlu při vrcholu C a přímky AB, bod L je průsečíkem osy vnějšího úhlu při vrcholu A a přímky BC a bod M je průsečíkem osy vnějšího úhlu při vrcholu B a přímky AC (obr. 5).

b) bod K je průsečíkem osy vnějšího úhlu při vrcholu C a přímky AB, bod L je průsečíkem osy vnitřního úhlu při vrcholu A a přímky BC a bod M je průsečíkem osy vnitřního úhlu při vrcholu B a přímky AC (obr. 6).



Obr. 5



Obr. 6

Řešení. Důkazy v případech a), b) jsou totožné.

Použijeme Menelaovu větu pro trojúhelník ABC a přímku KL a dále výše uvedené lemma. Platí tak

$$\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1.$$

Tím je důkaz hotov.

Příklad 5

Střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC se stranami délek a, b, c dělí osu CK úhlu ACB v poměru $|CI| : |IK| = (a + b) : c$.

Řešení. Využijeme obr. 3, kde si pouze představíme, že body K, L, M jsou průsečíky os úhlů s protilehlými stranami trojúhelníku ABC.

Použijeme Menelaovu větu pro trojúhelník KBC a přímku AL, takže platí

$$\frac{|BA|}{|KA|} \cdot \frac{|CL|}{|BL|} \cdot \frac{|KI|}{|CI|} = 1.$$

Dále využijeme tvrzení z výše uvedeného lemmatu, tj. osa úhlu trojúhelníku dělí protilehlou stranu v poměru příslušných přilehlých stran, což zde dává rovnost

$$\frac{|BK|}{|AK|} = \frac{a}{b}.$$

Využitím obou rovností dostaneme

$$\frac{|CI|}{|IK|} = \frac{|BA|}{|KA|} \cdot \frac{|CL|}{|BL|} = \frac{|BK| + |KA|}{|KA|} \cdot \frac{|CL|}{|BL|} = \left(\frac{a}{b} + 1\right) \cdot \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Příklad 6

Je dán pětiúhelník $ABCDE$, na přímkách AB, BC, CD, DE, EA leží po řadě body K, L, M, N, P, které jsou všechny různé od vrcholů pětiúhelníku. Procházejí-li přímky AM, BN, CP, DK, EL jedním bodem, pak platí

$$\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|DM|} \cdot \frac{|DN|}{|EN|} \cdot \frac{|EP|}{|AP|} = 1.$$

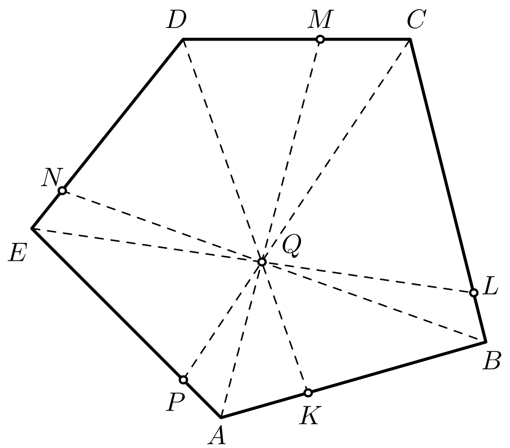
Řešení. Označme Q společný průsečík všech pěti sestrojených různoběžných přímek podle obr. 7. Označme ještě $S(ABC)$ obsah trojúhelníku ABC. Pro trojúhelníky AQD a BQD platí

$$\frac{S(AQD)}{S(BQD)} = \frac{|AK|}{|BK|},$$

neboť oba trojúhelníky mají společnou stranu QD a výšky k této straně jsou v poměru $|AK| : |BK|$. Analogické rovnosti platí pro další čtyři dvojice trojúhelníků. Takže celkově platí

$$\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|DM|} \cdot \frac{|DN|}{|EN|} \cdot \frac{|EP|}{|AP|} =$$

$$= \frac{S(AQD)}{S(BQD)} \cdot \frac{S(BQE)}{S(CQE)} \cdot \frac{S(CQA)}{S(DQA)} \cdot \frac{S(DQB)}{S(EQB)} \cdot \frac{S(EQC)}{S(AQC)} = 1.$$



Obr. 7

Úlohy k samostatnému řešení

Úloha 1

Platí analogické tvrzení jako v příkladu 6 pro konvexní sedmiúhelník, devítiúhelník atd., obecně pro libovolný mnohoúhelník s lichým počtem stran?

Úloha 2

Je dán trojúhelník ABC. Osa vnitřního úhlu při vrcholu A a osa vnějšího úhlu při vrcholu B se protínají v bodě P, analogicky osa vnitřního úhlu při vrcholu B a osa vnějšího úhlu při vrcholu A se protínají v bodě Q. Dokažte, ze body P, C, Q leží na jedné přímce.

Úloha 3

Je dán trojúhelník ABC, jehož obsah je $25\ \mathrm{cm}^2$. Bod K leží na přímce AB za bodem B a platí $|AK| : |BK| = 8 : 3$. Bod M leží na straně AC a platí $|AM| : |CM| = 2 : 3$. Bod L je průsečíkem přímek BC a KM. Určete obsah trojúhelníku BKL.

Úloha 4

Je dán čtyřúhelník $ABCD$, středy stran AB, BC, CD, DA označme postupně K, L, M, N a středy úhlopříček AC, BD označme postupně P, Q. Ještě označme S střed úsečky LN. Dokažte, že na jedné přímce leží body a) K, M, S, b) P, Q, S.

Návody k řešení zadaných úloh

Úloha 1: Tvrzení platí, důkazy lze vést analogicky jako v příkladu 6.

Úloha 2: Bod P leží na ose vnitřního úhlu při vrcholu A, proto má stejnou vzdálenost od přímek AB, AC, analogicky P leží na ose vnějšího úhlu při vrcholu B, proto má stejnou vzdálenost od přímek AB, BC. Odsud plyne, že P má stejnou vzdálenost od přímek AC, BC, takže leží na ose vnějšího úhlu při vrcholu C. Totéž platí pro bod Q.

Úloha 3: Podle Menelaovy věty pro trojúhelník ABC a přímku KM je

$$\frac{|BL|}{|CL|} = \frac{1}{4}.$$

Je-li v_c výška na stranu AB, je obsah trojúhelníku BKL roven

$$S(BKL) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot |AB| \cdot \frac{1}{5}\, v_c = \frac{3}{25} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB|\, v_c = \frac{3}{25} \cdot 25\,\mathrm{cm}^2 = 3\,\mathrm{cm}^2.$$

Úloha 4: Čtyřúhelník $KLMN$ je rovnoběžník, jeho úhlopříčky se protínají v bodě S. Analogicky $PNQL$ je rovnoběžník, jehož úhlopříčky se protínají v bodě S.

Závěr

V tomto příspěvku jsme uvedli několik dalších trojic bodů v rovině, které leží na téže přímce. K důkazům kolinearity jsme opět využívali Menelaovu větu a Cèvovu větu. Přednostně jsme zde využili příklady trojic kolineárních bodů uvedených v publikacích [1, 2, 3]. Další zajímavé trojice takových bodů uvedeme v navazujících článcích.

Literatura

[1] *Boček, L., Zhouf, J.*: Planimetrie. 2. rozšířené vydání, PedF UK, Praha, 2012.

[2] *Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L.*: Geometry revisited. The Mathematical Association of America, 1967, s. 51–79.

[3] *Švrček, J., Vanžura J.*: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha, 1988.

[4] *Zhouf, J.*: Tři speciální body ležící na jedné přímce I. Matematika–fyzika–informatika, roč. 30 (2021), č. 3, s. 180–185.

[5] *Zhouf, J.*: Tři speciální body ležící na jedné přímce II. Matematika–fyzika–informatika, roč. 30 (2021), č. 4, s. 261–271.