MATEMATIKA

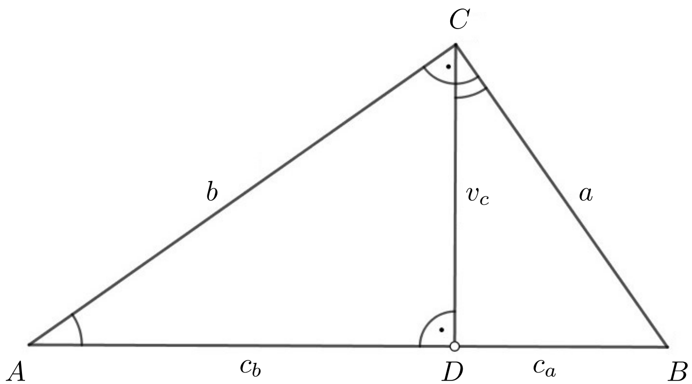
K základním větám o pravoúhlém trojúhelníku

MARIE CHODOROVÁ – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Již na základní a dále i na střední škole se žáci seznamují se třemi důležitými větami z geometrie pravoúhlého trojúhelníku. Jsou jimi Eukleidovy věty (o odvěsnách a o výšce) a Pythagorova věta.

Dříve než připomeneme jejich znění, zavedeme následující označení, které budeme využívat v celém příspěvku. V libovolném trojúhelníku ABC, jehož pata výšky D z vrcholu C je vnitřním bodem strany AB, budeme délky jeho stran značit $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ a dále $c_a = |BD|$, $c_b = |AD|$ a $v_c = |CD|$ – stejně jako v pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB na obr. 1.



Obr. 1

Věta 1 (Eukleidova — o odvěsnách)
Je-li ABC pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB, *pak* platí rovnosti

$$a^2 = c \cdot c_a, \qquad b^2 = c \cdot c_b. \tag{1}$$

Věta 2 (Eukleidova — o výšce)
Je-li ABC pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB, *pak* platí vztah

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b. \tag{2}$$

Věta 3 (Pythagorova)
Je-li ABC pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB, *pak* pro délky jeho odvěsen a, b a délku c přepony platí rovnost

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{3}$$

V některých učebnicích matematiky pro ZŠ a SŠ se můžeme setkat s alternativními formulacemi výše uvedených tří vět. Např. v [1] je Pythagorova věta formulována následovně:

Věta 3′
V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky přepony rovna součtu druhých mocnin délek obou odvěsen.

V této formulaci Pythagorovy věty se však průměrnému žákovi může ztrácet struktura této věty, v níž se jedná o *složenou výrokovou formu ve tvaru implikace.*

Důkazy prvních dvou vět (věta 1 a 2) se opírají o užití podobnosti trojúhelníků. Snadno se totiž vidí (obr. 1), že podle věty *uu* platí

$$\triangle ABC \sim \triangle CBD \sim \triangle ACD.$$

Uvedením odpovídajících podobnostních poměrů dostaneme (po jejich snadné úpravě) přímo vztahy (1) a (2).

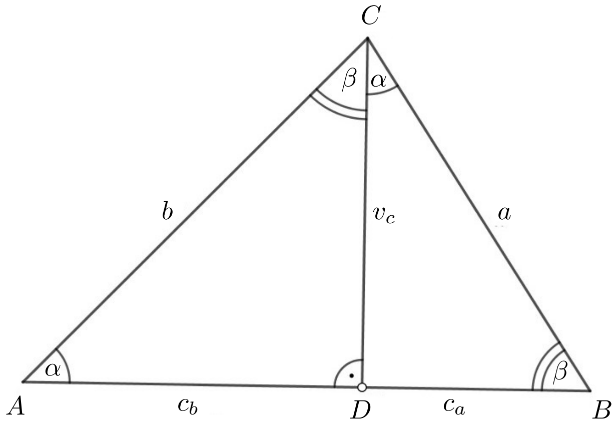
Ze vztahů (1) a z rovnosti $c_a + c_b = c$ pak plyne přímo (3). Platí totiž

$$a^2 + b^2 = c \cdot c_a + c \cdot c_b = c(c_a + c_b) = c^2,$$

což dokazuje tvrzení věty 3 (Pythagorovy).

Cílem další části našeho příspěvku je poukázat na využití někdy méně akcentovaných – obrácených vět k větám 1–3, a to zejména při řešení konkrétních úloh. Níže uvedená trojice tvrzení (vět) je totiž z praktického hlediska mnohem více využitelná než jen např. při důkazech kolmosti dvojice přímek (úseček) nebo k ověření skutečnosti, že trojúhelník s danými prvky je pravoúhlý.

V následujících dvou větách (věty 4 a 5) budeme *předpokládat*, že pata D výšky z vrcholu C v trojúhelníku ABC je *vnitřním bodem* jeho strany AB (obr. 2).



Obr. 2

Věta 4 (obrácená věta k Eukleidově větě o odvěsnách)

Jestliže v trojúhelníku ABC platí $a^2 = c \cdot c_a$ nebo $b^2 = c \cdot c_b$, *pak* tento trojúhelník je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C.

Důkaz provedeme pouze za předpokladu rovnosti $a^2 = c \cdot c_a$ (v případě rovnosti $b^2 = c \cdot c_b$ lze postupovat analogicky). Z dané rovnosti v předpokladu věty tak plyne

$$\frac{a}{c} = \frac{c_a}{a}.$$

Protože navíc

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CBD|,$$

jsou trojúhelníky ABC a CBD podle věty *sus* podobné. Vzhledem k tomu, že úhel BDC je pravý (obr. 2), je pravý také úhel BCA, tj. trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C, což jsme chtěli dokázat.

Věta 5 (obrácená věta k Eukleidově větě o výšce)

Nechť v trojúhelníku ABC platí $v_c^2 = c_a \cdot c_b$, *pak* tento trojúhelník je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C.

Důkaz. Podle předpokladu věty platí

$$\frac{v_c}{c_a} = \frac{c_b}{v_c}.$$

Odtud plyne, že trojúhelníky ADC a CDB jsou podobné (sus), neboť platí $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle CDB| = 90°$ (vnitřní úhly při vrcholu D v obou trojúhelnících jsou pravé, viz obr. 2). Pak ale $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle BCD| = \alpha$ a $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle ACD| = \beta$, viz obr. 2. Pro součet vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC přitom platí

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 2(\alpha + \beta) = 180°,$$

tedy $|\sphericalangle BCA| = \alpha + \beta = 90°$, což znamená, že trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C. Tím je důkaz uzavřen.

Věta 6 (obrácená věta k větě Pythagorově)
Jestliže pro délky a, b, c stran trojúhelníku ABC platí $a^2 + b^2 = c^2$, *pak* je tento trojúhelník pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C.

Důkaz. Protože platí $a^2 + b^2 = c^2$, je $(a < c) \wedge (b < c)$. Kromě toho platí také

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = c^2 + 2ab > c^2.$$

Odtud plyne $a + b > c$, což představuje nutnou a postačující podmínku pro existenci trojúhelníku ABC o stranách délek a, b a c.

Podle předpokladu pro délky a, b, c stran trojúhelníku ABC platí

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{4}$$

Užitím kosinové věty v trojúhelníku ABC dostáváme také

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2, \tag{5}$$

kde $\gamma = |\sphericalangle BCA|$. Odečtením (5) od (4) pak po úpravě obdržíme $\cos\gamma = 0$, tj. $\gamma = 90°$. To znamená, že trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C, čímž je důkaz této věty ukončen.

Závěrem uvádíme trojici příkladů, v jejichž řešeních najdete přímé aplikace výše uvedených základních vět o pravoúhlém trojúhelníku. Poslední z příkladů je určen čtenářům k samostatnému procvičení prezentované problematiky.

Příklad 1

Nechť AC a BD jsou navzájem kolmé úsečky, které se protínají v bodě P, pro který platí $|AP| : |CP| = 1 : 4$ a $|BP| = |DP| = 4$. Určete délku úhlopříčky AC čtyřúhelníku $ABCD$, který je tětivový.

Řešení. Ze zadání je patrné, že čtyřúhelník $ABCD$ je deltoid, který je osově souměrný podle přímky AC. Tento deltoid je tětivový, právě když je jeho úhlopříčka AC průměrem kružnice tomuto deltoidu opsané, tj. právě když oba jeho vnitřní úhly při vrcholech B a D jsou pravé (jedná se tedy o Thaletovu kružnici sestrojenou nad průměrem AC).

Označme $u = |AP|$, pak $|CP| = 4u$ (obr. 3). Podle věty 2 (Eukleidova věta o výšce) v pravoúhlém trojúhelníku ABC platí

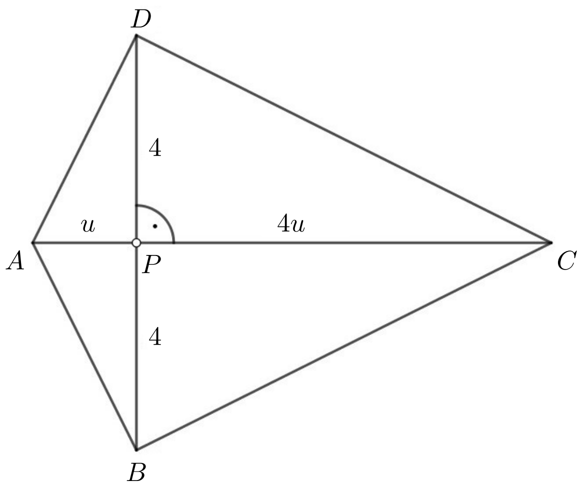
$$16 = 4^2 = |BP|^2 = |AP| \cdot |CP| = u \cdot 4u,$$

tj.

$$4u^2 = 16.$$

Kladným kořenem této ryze kvadratické rovnice je $u = 2$. Platí tedy

$$|AC| = |AP| + |CP| = u + 4u = 2 + 8 = 10.$$



Obr. 3

Závěr. Úhlopříčka AC čtyřúhelníku $ABCD$, který vyhovuje podmínkám úlohy, má délku 10.

Příklad 2

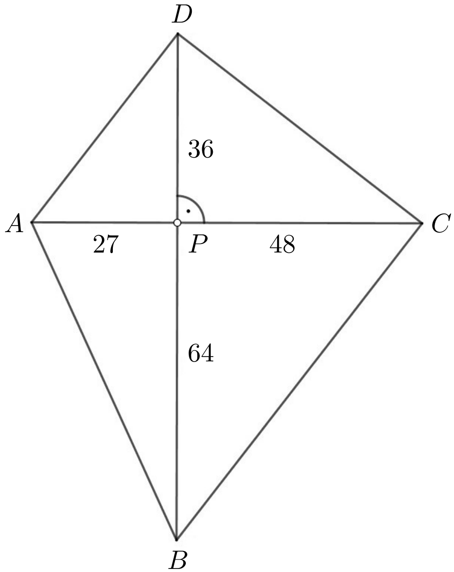
Nechť AC a BD jsou navzájem kolmé úsečky, které se protínají v bodě P, kde $|AP| = 27$, $|BP| = 64$, $|CP| = 48$, $|DP| = 36$. Dokažte, že $ABCD$ je pravoúhlý lichoběžník s pravými úhly při vrcholech C a D.

Řešení. Při řešení této úlohy lze zvolit několik možných postupů, které se opírají o kombinaci výsledků výše uvedených vět. Mezi nejelegantnější řešení však bezesporu patří dvojí využití věty 5 (obrácené věty k Eukleidově větě o výšce).

V trojúhelníku BCD je patou výšky z vrcholu C průsečík P obou daných, navzájem kolmých úseček AC a BD. Podle věty 5 tedy v trojúhelníku BCD (obr. 4) platí

$$2\,304 = 48^2 = |CP|^2 = |BP| \cdot |DP| = 64 \cdot 36,$$

a proto je úhel BCD (podle věty 5) pravý.



Obr. 4

Podobně v trojúhelníku ACD s patou P výšky z jeho vrcholu D platí

$$1\,296 = 36^2 = |DP|^2 = |AP| \cdot |CP| = 27 \cdot 48,$$

a tedy i úhel CDA je pravý.

Tím jsme dokázali, že $ABCD$ je pravoúhlý lichoběžník s pravými úhly při vrcholech C a D a se základnami BC a DA ($BC \parallel DA$).

Jiné řešení využívá nejprve větu 3 (Pythagorovu) v pravoúhlých trojúhelnících BCP, CDP a DAP s pravými úhly při vrcholu P. Platí tak

$$
\begin{aligned}
|BC|^2 &= |BP|^2 + |CP|^2 = 64^2 + 48^2 = 4\,096 + 2\,304 = 6\,400,\\
|CD|^2 &= |CP|^2 + |DP|^2 = 48^2 + 36^2 = 2\,304 + 1\,296 = 3\,600,\\
|DA|^2 &= |DP|^2 + |AP|^2 = 36^2 + 27^2 = 1\,296 + 729 = 2\,025.
\end{aligned}
$$

Dále pro délky stran trojúhelníků BCD a ACD použijeme *obrácenou větu* k větě Pythagorově (věta 6). Platí, viz obr. 4,

$$
\begin{aligned}
&6\,400 + 3\,600 = |BC|^2 + |CD|^2 =\\
&\qquad = |BD|^2 = (|BP| + |DP|)^2 = (64 + 36)^2 = 10\,000
\end{aligned}
$$

a také

$$
\begin{aligned}
&2\,025 + 3\,600 = |AD|^2 + |CD|^2 =\\
&\qquad = |AC|^2 = (|AP| + |CP|)^2 = (27 + 48)^2 = 5\,625.
\end{aligned}
$$

Odtud plyne, že oba trojúhelníky BCD a ACD jsou pravoúhlé s přeponami po řadě BD a AC, a tudíž $ABCD$ je pravoúhlý lichoběžník se základnami BC a DA, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 3 (XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów, 2021/2022, viz [2])
Jsou dány dvě navzájem kolmé úsečky AB a CD, které se protínají v bodě P. Je známo, že $|AC| = |BD|$, $|AD| = |BP|$ a $|DP| = 1$. Určete délku úsečky CP.

Literatura

[1] *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia – planimetrie (5. vydání). Prometheus, Praha, 2018.

[2] Olimpiada Matematyczna Juniorów. Dostupné z: https://omj.edu.pl