Matematický klokan pro žáky základních škol I

DAVID NOCAR – VLADIMÍR VANĚK

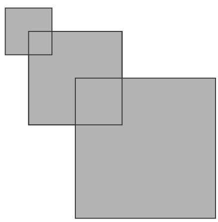
Pedagogická fakulta UP – Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Mezinárodní soutěž Matematický klokan (MK) není třeba představovat. Soutěž na základních školách, resp. v ekvivalentních ročnících víceletých gymnázií, probíhá ve čtyřech kategoriích: Cvrček (2.–3. ročník), Klokánek (4.–5. ročník), Benjamín (6.–7. ročník) a Kadet (8.–9. ročník). Schéma soutěže, její historii, organizační záležitosti i statistiky najdete např. v [1].

Cílem tohoto příspěvku je nabídnout čtenářům – zájemcům o uvedenou soutěž – úplná řešení vybraných zajímavých úloh z kategorie Benjamín, která je určena žákům 6. a 7. ročníků základní školy a 1. a 2. ročníkům osmiletých gymnázií. Úlohy byly převzaty z ročníků soutěže Matematický klokan pořádaných v letech 2017–2021, případně se jedná o úlohy, které byly navrženy mezinárodní asociací (Association Kangourou sans Frontières), avšak do finálního výběru se nedostaly.

Všechny „klokanské“ úlohy jsou formulovány tak, aby byly řešitelné pouhou úvahou přiměřenou věku řešitele. V textu lze nalézt jak řešení, která využívají matematický aparát, který může přesahovat znalosti žáků daného věku, tak řešení úvahou, která se u úloh tohoto typu očekává. Neklademe si za cíl předložit všechna možná řešení úloh. Vybírali jsme především ta řešení, jež může učitel využít při výuce příslušné oblasti školské matematiky.

Připomeňme, že v případě Matematického klokana hovoříme o uzavřených úlohách, tj. *žáci si vybírají z nabízených odpovědí, z nichž právě jedna je správná.* Mohou tak využívat i strategií, které jsou zaměřeny na eliminaci distraktorů, aniž by danou úlohu přímo řešili.



Benjamín (MK 2017, úloha č. 16)
Na obrázku vidíš tři čtverce, které se překrývají. Nejmenší čtverec má délku strany 2 cm, střední čtverec má délku strany 4 cm a jeden z jeho vrcholů leží ve středu nejmenšího čtverce. Největší čtverec má délku strany 6 cm a jeden z jeho vrcholů leží ve středu

středního čtverce. Urči obsah celého útvaru.

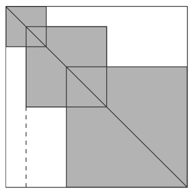
(A) $51\,\mathrm{cm}^2$ (B) $7{,}5\,\mathrm{cm}^2$ (C) $8\,\mathrm{cm}^2$ (D) $8{,}2\,\mathrm{cm}^2$ (E) $8{,}5\,\mathrm{cm}^2$

Řešení. Začněme metodou, která není nejrychlejší, ale žáky pravděpodobně napadne nejdříve. Označme S_1, S_2, S_3 po řadě obsahy čtverců od nejmenšího po největší. Je-li vrchol středního čtverce středem nejmenšího čtverce, je jejich průnikem opět čtverec o straně, jejíž délka je polovinou délky nejmenšího čtverce a tudíž o obsahu $\frac{1}{4}$ obsahu nejmenšího čtverce. Obdobně pro průnik největšího a prostředního čtverce. Obsah zadaného útvaru je tedy

$$S = S_1 + S_2 + S_3 - (S_1 \cap S_2) - (S_2 \cap S_3) = \\ = (4 + 16 + 32 - 1 - 4)\,\mathrm{cm}^2 = 51\,\mathrm{cm}^2.$$

Podobně bychom mohli řešit úlohu jen přičítáním obsahů nepřekrývajících se ploch. Začneme obsahem největšího čtverce a přičteme $\frac{3}{4}$ obsahu menšího čtverce a nakonec ještě přičteme $\frac{3}{4}$ obsahu nejmenšího čtverce:

$$S = S_3 + \frac{3}{4}S_2 + \frac{3}{4}S_1 = (36 + 12 + 3)\,\mathrm{cm}^2 = 51\,\mathrm{cm}^2.$$



Jiné řešení vychází z doplnění daného útvaru na jeden velký čtverec, viz. obrázek. Díky symetrii tohoto útvaru (osová souměrnost podle úhlopříčky doplněného čtverce) stačí zjistit obsah poloviny útvaru a výsledek zdvojnásobit. Doplněný čtverec má délku strany $a_4 = a_3 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_1 = 9$ cm a obsah $S_4 = 81\mathrm{cm}^2$. Od obsahu poloviny tohoto čtverce odečteme obsahy dvou vyznačených obdélníků ($S_{o_1} = 1\mathrm{cm} \cdot 7\mathrm{cm} = 7\mathrm{cm}^2$, $S_{o_2} = 2\mathrm{cm} \cdot 4\mathrm{cm} = 8\mathrm{cm}^2$), čímž získáme polovinu hledaného obsahu zadaného útvaru:

$$\frac{S}{2} = \frac{S_4}{2} - S_{o_1} - S_{o_2} = 25{,}5\ \mathrm{cm}^2.$$

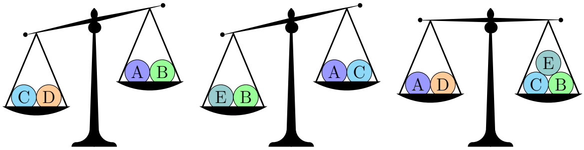
Celkem tedy $S = 51\ \mathrm{cm}^2$.

Nebyla by to „klokanská“ úloha, kdybychom ji nezkusili řešit posouzením nabízených odpovědí.

Je potřeba opět stanovit kritéria, na jejichž základě je možné distraktory eliminovat. Máme určit obsah útvaru složeného ze tří částečně se překrývajících čtverců. Je zřejmé, že jeho obsah musí být větší, než obsah největšího ze čtverců ($S > S_3 = 36\ \mathrm{cm}^2$). Jediná nabízená odpověď, která splňuje stanovené kritérium je (A).

Závěr: Obsah zadaného útvaru je 51 cm^2.

Benjamín (MK 2018, úloha č. 18)
Pět míčků váží 30 g, 50 g, 50 g, 50 g a 80 g. Podle obrázků rovnoramenných vah urči, který z míčků váží 30 g.



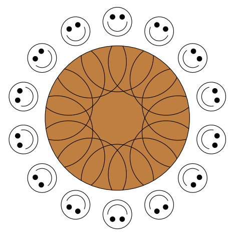
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

Řešení. Při standardním řešení můžeme využít rovnice a nerovnice. Z druhého obrázku vidíme, že pro hmotnosti platí $B + E > A + C$. Třetí obrázek pak dává do rovnosti hmotnosti $A + D = B + C + E$. Jestliže $B + E > A + C$, pak $B + C + E > A + C + C$. Dosazením do rovnosti získáme $A + D = B + C + E > A + C + C$, neboli $D > 2C$. Vzhledem k hmotnostem uvedeným v zadání úlohy je zřejmé, že hledaným míčkem je C.[1)]

Úlohu lze řešit ekvivalentní úvahou: Z třetího obrázku vidíme, že nejlehčí míček musí být na pravé straně vah. Tedy B, nebo C, nebo E. Ovšem druhé váhy nám říkají, $B + E$ je těžší než $A + C$. Zřejmě je C nejlehčím míčkem na vahách.

Závěr: Míček C váží 30 g.

Benjamín (MK 2018, úloha č. 22)
Kolem kulatého stolu sedí 14 osob. Každá z nich je buď lhář, nebo mluví pravdu. Každá tvrdí: „Oba mí sousedé jsou lháři.“ Zjistěte největší možný počet lhářů u stolu.



(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 14

Řešení: Jedná se o poměrně běžnou logickou úlohu Matematického klokana. Její řešení, jak už to u „klokanských“ úloh bývá, je postaveno na jednoduché úvaze. Místo na maximální počet lhářů (L) se zaměříme na

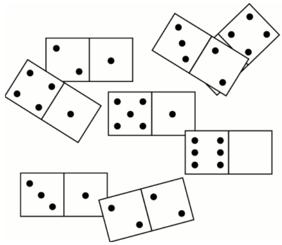
[1)] V originálním celosvětovém zadání se skutečně v obrázku objevily tři rovnoramenné váhy. V české verzi byly první váhy odstraněny, protože zjevně nejsou k řešení potřeba.

minimální počet pravdomluvných (P). Každý pravdomluvný člověk musí mít po obou svých stranách lháře, tedy tvoří tříčlenné skupinky LPL.

Tyto skupinky mohou být maximálně čtyři. Máme tak usazeno vedle sebe 12 osob, zbývají dvě osoby. Obě nemohou být lháři, protože pak by seděli čtyři lháři vedle sebe a jeden z nich by říkal pravdu, což není možné. Oba nejsou ani pravdomluvní, protože dva pravdomluvní vedle sebe sedět nemohou. Musí zde být tedy jeden pravdomluvný a jeden lhář. Celkem jsou ve čtyřech skupinkách LPL čtyři pravdomluvní a jeden ve zbývající dvojici. U stolu tak sedí pět pravdomluvných.

Závěr: U stolu sedí 9 lhářů.

Benjamín (MK 2018, úloha č. 23)
Na obrázku je 8 klasických dominových kostek. Polovina jedné dominové kostky je překryta. Ze všech osmi dominových kostek jsme vytvořili čtverec 4×4 tak, že počet ok v každém řádku i sloupci byl stejný. Kolik ok je na zakryté části dominové kostky?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Řešení: Nejprve si uvědomme, že na polovině dominové kostky může být nejvýše 6 ok. Představme si, že již máme z dominových kostek sestaven požadovaný čtverec. V každém řádku (sloupci) je součet ok stejný, označme jej n. Celkový součet všech ok ve čtverci je pak $4n$, tedy číslo dělitelné čtyřmi. Na obrázku vidíme pouze 37 ok. Nejbližší větší číslo dělitelné čtyřmi je 40.

Závěr: Na zakryté části dominové kostky jsou 3 oka.

Benjamín (MK 2018, nepoužita)
Mikuláš chce rozdělit čísla 2, 3, 4, ..., 10 do několika skupin tak, aby součet čísel v těchto skupinách byl stejný. Určete největší možný počet takových skupin.

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (B) 6 (B) jiná odpověď

Řešení: Sečteme-li všechna Mikulášova čísla, dostaneme 54. Součet čísel v každé skupině musí být minimálně 10. Hledáme tedy nejmenšího dělitele čísla 54 ($54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$), který je současně větší než 10. Hledaným číslem je 18 ($2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$). Tato hodnota udává součet čísel v každé ze skupin. Je-li součet čísel v každé skupině 18, pak existují 3 takové skupiny ($54 : 18 = 3$).

Závěr: Mikuláš mohl čísla rozdělit maximálně do tří skupin.

Benjamín (MK 2019, úloha č. 24)

Mirek má 2 automaty: v prvním získá za 1 bílý žeton 4 červené žetony, zatímco ve druhém získá za 1 červený žeton 3 bílé. Mirek měl na začátku 4 bílé žetony. Po 11 výměnách má 31 žetonů. Kolik z nich je červených?

(A) 11 (B) 14 (C) 17 (D) 21 (E) 27

Řešení: Označme x počet výměn prvního typu (1 bílý $\to$ 4 červené) a y počet výměn druhého typu (1 červený $\to$ 3 bílé). Každá výměna prvního typu zvýší počet žetonů o 3 kusy, každá výměna druhého typu zvýší počet žetonů o 2 kusy. Na počátku měl Mirek 4 žetony a po 11 výměnách 31 žetonů. Získal tak celkem 27 žetonů navíc. Můžeme tak sestavit následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 27, \\ x + y &= 11, \end{aligned}$$

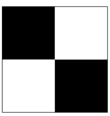
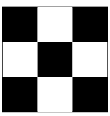
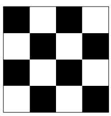
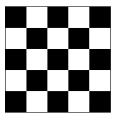
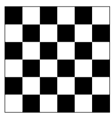
jejímž vyřešením (dosazovací, nebo sčítací metodou) získáme řešení $x = 5$ a $y = 6$. Pro počet červených žetonů platí $4 \cdot x - 1 \cdot y = 14$.

Žáci 6. a 7. ročníku ZŠ ovšem řešení soustav lineárních rovnic neznají. Úlohu je ale možné řešit jednoduchou úvahou. Ponechme označení jako v předchozím textu, tedy x značí počet výměn prvního typu (1 bílý $\to$ 4 červené) a y počet výměn druhého typu (1 červený $\to$ 3 bílé). Každá výměna prvního typu nám zvýší počet žetonů o 3 kusy, každá výměna druhého typu zvýší počet žetonů o 2 kusy, tedy o jeden méně. Na počátku jsme měli 4 žetony a po 11 výměnách 31 žetonů. Získali jsme tak celkem 27 žetonů navíc. Pokud bychom prováděli pouze výměny prvního typu, získali bychom po 11 výměnách navíc 33 žetonů což je o šest více, než potřebujeme. Proto musí být šest výměn prvního typu nahrazeno šesti výměnami druhého typu. Celkem $x = 5$ a $y = 6$.

Závěr: Po jedenácti výměnách má Mirek 14 červených žetonů.

Benjamín (MK 2019, úloha č. 13)

Pět shodných čtverců je rozděleno na menší čtvercové díly (černé a bílé). U kterého čtverce je největší obsah všech černých částí?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Řešení: Můžeme samozřejmě rozhodnout o tom, který čtverec má největší obsah černých částí i bez znalosti konkrétních vyjádření jednotlivých obsahů, nejprve si však ukážeme řešení, v němž jednotlivé obsahy černých částí čtverců konkrétně vyjádříme. Použijeme přitom známý vzorec pro výpočet obsahu čtverce $S = a^2$.

Označíme-li délku strany celého čtverce a, budou mít délky stran černých čtverečků u jednotlivých případů hodnoty uvedené v následující tabulce. Dále dopočítáme obsah černého čtverečku a na základě zjištěného počtu čtverečků spočítáme obsah celé černé části původního čtverce.

Případ	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
Délka strany černého čtverečku	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{5}$	$\frac{a}{6}$
Obsah černého čtverečku	$\frac{a^2}{4}$	$\frac{a^2}{9}$	$\frac{a^2}{16}$	$\frac{a^2}{25}$	$\frac{a^2}{36}$
Počet černých čtverečků	2	5	8	13	18
Součet obsahů černých čtverečků	$\frac{a^2}{2}$	$\frac{5a^2}{9}$	$\frac{a^2}{2}$	$\frac{13a^2}{25}$	$\frac{a^2}{2}$
Součet obsahů černých čtverečků[2)]	$\frac{225}{450}a^2$	$\frac{250}{450}a^2$	$\frac{225}{450}a^2$	$\frac{234}{450}a^2$	$\frac{225}{450}a^2$

Ze získaných hodnot, vyjadřujících obsah všech černých čtverečků, je největší hodnota v případě (B).

Dalším možným řešením je porovnání zlomků, vyjadřujících podíl počtu černých čtverečků (označme c) ku počtu všech čtverečků (označme v).

Případ	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
v	4	9	16	25	36
c	2	5	8	13	18
$\frac{c}{v}$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{5}{9} = 0{,}\overline{55}$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{13}{25} = 0{,}52$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$

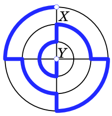
Můžeme vidět, že oba předešlé přístupy k řešení úlohy jsou téměř totožné. Pokud bychom si zvolili v prvním postupu řešení za délku strany velkého čtverce jednotku ($a = 1$), bude součet obsahů černých čtverečků totožný s podílem černých čtverečků ku všem čtverečkům v celém velkém čtverci.

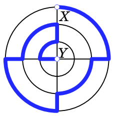
2) Rozšířeno na zlomky o stejném jmenovateli.

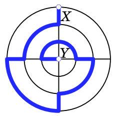
Ještě ukážeme postup, který bychom od žáků při řešení této úlohy očekávali. Při předešlém řešení jsme ukázali podíl obsahu černých částí na celkovém obsahu čtverce. Kromě toho se lze podívat i na poměr obsahu černých částí ku obsahu bílých částí. Zde si všimněme, že pokud je strana čtverce rozdělena na sudý počet stejných částí, je poměr černé části ku bílé části 1 : 1. Takové možné odpovědi jsou zde tři: (A), (C), (E). To je z principu pravidel soutěže Matematický klokan vylučuje (vždy je jediná správná odpověď). Odpovědí tedy může být buď (B), nebo (D). V obou případech je vždy o jeden černý čtvereček víc než je čtverečků bílých. Tento černý čtvereček navíc je největší u prvního lichého dělení (tj. rozdělení strany čtverce na 3 části).

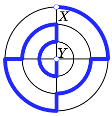
Závěr: Největší obsah černých částí je u čtverce v případě (B).

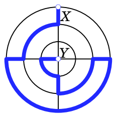
Benjamín (MK 2020, úloha č. 12)
Na následujících obrázcích je vyznačeno 5 různých cest z bodu X do bodu Y. Která z nich je nejkratší?

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


Řešení: Chceme-li úlohu vyřešit pomoci konkrétních číselných hodnot, můžeme zvolit poloměr nejmenší kružnice jako jednotku. Poloměr každé další kružnice je o tuto jednotku větší: $k_1(Y, r_1 = 1)$, $k_2(Y, r_2 = 2)$, $k_3(Y, r_3 = 3)$. Spočítáme-li délku kružnice $o = 2\pi r$, získáme i délku polokružnice a čtvrtkružnice. Všechny rovné úseky pak mají délku zvolené jednotky: $o_1 = 2\pi$, $o_2 = 4\pi$, $o_3 = 6\pi$. Délky tras z bodu X do bodu Y jsou potom následující:

(A) $\frac{1}{4}o_3 + 1 + \frac{1}{4}o_2 + 1 + \frac{1}{4}o_3 + 1 + \frac{1}{4}o_2 + 1 + \frac{1}{2}o_1 + 1 = 6\pi + 5$,

(B) $\frac{1}{4}o_3 + 1 + \frac{1}{4}o_2 + 1 + \frac{1}{4}o_3 + 1 + \frac{1}{4}o_2 + 1 + \frac{1}{4}o_1 + 1 = \frac{11}{2}\pi + 5$,

(C) $1 + \frac{1}{4}o_2 + 1 + \frac{1}{4}o_3 + 1 + \frac{1}{4}o_2 + 1 + \frac{1}{2}o_1 + 1 = \frac{9}{2}\pi + 5$,

(D) $\frac{1}{4}o_3 + 1 + \frac{1}{4}o_2 + 1 + \frac{1}{4}o_3 + 1 + \frac{1}{4}o_2 + 1 + \frac{1}{2}o_1 + 1 = 6\pi + 5$,

(E) $1 + \frac{1}{4}o_2 + 1 + \frac{1}{2}o_3 + 1 + \frac{1}{4}o_2 + 1 + \frac{1}{4}o_1 + 1 = \frac{11}{2}\pi + 5$.

Nejmenší číselnou hodnotou představující délku trasy z bodu X do bodu Y je $\frac{9}{4}\pi + 5$, tj. trasa (C).

Takto ale v rámci soutěže, která je časově omezená, nebude určitě nikdo úlohu řešit. V této úloze nejde ani o konkrétní hodnoty délek tras, a dokonce ani o znalost výpočtu délky kružnice (obvodu kruhu). Kratším řešením je omezení výpočtu jen na součty částí kružnic – bez výpočtu jejich délek.

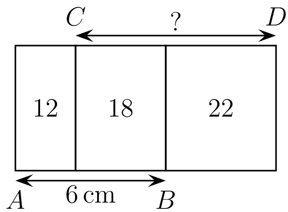
Ještě snazší řešení plyne pouze z porovnání těch částí, ve kterých se zadané trasy liší. Všechny rovné úseky jsou stejně dlouhé a ve všech případech je jejich počet stejný, proto je můžeme ignorovat. Stejně tak můžeme ignorovat všechny části kružnic, které jsou společné všem případům $\left(\frac{1}{4}o_3, \frac{1}{2}o_2, \frac{1}{4}o_1\right)$. Stačí tedy porovnat jen počet zbývajících částí kružnic:

(A) $\frac{1}{4}o_3 + \frac{1}{4}o_1$, (B) $\frac{1}{4}o_3$, (C) $\frac{1}{4}o_1$, (D) $\frac{1}{4}o_3 + \frac{1}{4}o_1$, (E) $\frac{1}{4}o_3$.

Vzhledem k jednoznačnosti řešení, nemůže být správným řešením žádný z distraktorů z dvojice stejných hodnot (A), (D), resp. (B), (E).

Závěr: Nejkratší vyznačená cesta z bodu X do bodu Y je tedy znázorněna na obrázku (C).

Benjamín (MK 2021, úloha č. 12)
Obdélník na obrázku je rozdělen na tři menší obdélníky, kde čísla uvnitř udávají jejich obsahy v cm^2. Jestliže délka úsečky AB je 6 cm, jaká je délka úsečky CD?



(A) 7 cm (B) 7,5 cm (C) 8 cm
(D) 8,2 cm (E) 8,5 cm

Řešení: K řešení úlohy lze přistoupit různými způsoby. Na obrázku vidíme tři obdélníky a jim příslušné obsahy. Tyto číselné hodnoty jsou v určitém poměru. Nebudeme počítat poměr všech tří obsahů, neboť dalším známým údajem je součet stran dvou sousedících obdélníků. Použijeme poměry po dvojicích. Nejprve zavedeme následující označení: Strana b má pro všechny tři obdélníky stejnou délku. Ostatní strany dílčích obdélníků označíme po řadě (zleva doprava) a_1, a_2, a_3. Pak pro jednotlivé obsahy obdélníků platí:

$$S_1 = 12 = a_1 \cdot b, \quad S_2 = 18 = a_2 \cdot b, \quad S_3 = 22 = a_3 \cdot b, \quad a_1 + a_2 = 6.$$

Pro poměr obsahů prvního a druhého obdélníku platí:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{3} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{6 - a_2}{a_2}.$$

Odtud $a_2 = 3{,}6$ cm a $a_1 = 2{,}4$ cm

Pro poměr obsahů druhého a třetího obdélníku platí:

$$\frac{S}{S_3} = \frac{9}{11} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{18}{5a_3}.$$

Odtud $a_3 = 4{,}4$ cm, tudíž $a_2 + a_3 = 8$ cm.

Jde o jednu z možností, jak úlohu vyřešit, ale opět se v rámci soutěže Matematický klokan (ani mimo ni) takovýto postup neočekává.

Mnohem rychlejší a jednodušší přístup k řešení této úlohy vychází z rozdělení původního obdélníku na tři menší obdélníky a na jejich opětovné slučování po dvojicích, neboť je zadána i dotazována délka součtu dvou stran. Tento součet představuje délku strany nějakého dalšího obdélníku podle obrázku.

Spojením prvního a druhého obdélníku vznikne obdélník o straně délky 6 cm a obsahu rovnajícímu se součtu obsahů S_1 a S_2, tj. 30 cm^2. Ze vzorce pro výpočet obsahu obdélníku (v našem případě $S_1 + S_2 = (a_1 + a_2) \cdot b$) dostaneme

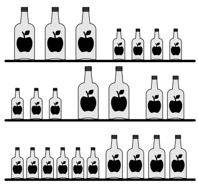
$$b = \frac{S_1 + S_2}{a_1 + a_2} = \frac{30\,\mathrm{cm}^2}{6\,\mathrm{cm}} = 5\ \mathrm{cm}.$$

Délka strany b je stejná pro všechny vytvořené obdélníky. Délku úsečky CD v obdélníku, který vznikne spojením druhého a třetího obdélníku s obsahy S_2 a S_3, v součtu 40 cm^2, získáme opět ze vztahu pro výpočet obsahu obdélníku a známé společné strany b:

$$|CD| = a_2 + a_3 = \frac{S_2 + S_3}{b} = \frac{40\,\mathrm{cm}^2}{5\,\mathrm{cm}} = 8\ \mathrm{cm}.$$

Závěr: Délka úsečky CD vyznačené na obrázku je 8 cm.

Benjamín (MK 2021, úloha č. 23)



Na každé polici je uskladněno 64 decilitrů džusu. Láhve s džusem mají tři různé velikosti: velkou, střední a malou. Kolik decilitrů džusu obsahuje střední láhev?

(A) 3 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 14

Řešení: Úlohu lze řešit pomocí soustavy lineárních rovnic, kde V značí objem džusu ve velké láhvi, S ve střední láhvi a M v malé láhvi.

$$\begin{aligned} 3V + 4M &= 64,\\ 2V + 2S + 3M &= 64,\\ 4S + 6M &= 64. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy (metodou dosazovací, sčítací nebo jejich kombinací) obdržíme $V = 16$, $S = 10$ a $M = 4$.

Žáci ovšem mohou řešit úlohu bez užití soustavy lineárních rovnic následovně:

1. možnost

Ze spodních dvou polic je zřejmé, že objem dvou velkých láhví je stejný jako součet objemů dvou středních a tří malých láhví. V prostřední polici tudíž můžeme nahradit dvě střední a tři malé láhve dvěma velkými.

$$\underline{\quad V \quad V \quad V \quad V \quad} = 64$$

Celkem tedy 4 velké láhve obsahují 64 decilitrů džusu. Z horní police dopočítáme objem džusu v malé láhvi a následně z dolní police objem střední láhve.

2. možnost

Jinou možností je využití horní a prostřední police k určení vztahu $V + M = 2S$. V prostřední polici nahradíme dvě velké láhve a dvě malé láhve čtyřmi středními láhvemi.

$$\underline{\quad M \quad S \quad S \quad S \quad S \quad S \quad S \quad} = 64$$

Stojí na ní tak jedna malá láhev a šest středních láhví. Projděme si nyní distraktory. Pokud by střední láhev obsahovala 14 decilitrů džusu, pak šest středních láhví obsahuje 84 decilitrů džusu, což není přípustné. Pokud by střední láhev obsahovala 8 decilitrů džusu, pak šest středních láhví obsahuje 48 decilitrů džusu a malá láhev by musela pojmout 16 decilitrů a byla by větší než střední láhev, obdobně pro distraktory (A) a (B). Jediným možným řešením je tak (D).

Závěr: Ve střední láhvi je 10 decilitrů džusu.

V následujícím čísle časopisu Matematika–Fyzika–Informatika najdou čtenáři obdobný příspěvek obsahující řešené úlohy z kategorie Kadet.

Literatura

[1] *Vaněk, V., Calábek, P., Nocar, D.*: České stopy v Matematickém klokanovi. Matematika–fyzika–informatika, roč. 27 (2018), č. 5, s. 334–346.

[2] Matematický klokan [online]. Olomouc, 2022 [cit. 15.3.2022]. Dostupné z: http://www.matematickyklokan.net/

[3] Mathematical Kangaroo [online]. Paříž, 2022 [cit. 29.4.2022]. Dostupné z: https://support.aksf.org/default.aspx

[4] Association Kangourou sans Frontieres [online]. Paříž, 2022 [cit. 19.4.2022]. Dostupné z: http://aksf.org/

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část naší pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 31. 12. 2022 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz.

Úloha 279

Dokažte, že pro všechna reálná čísla $a \geq 1$, $b \geq 2$, $c \geq 1$, $d \geq 2$ platí nerovnost

$$4\sqrt{a^2-1}+2\sqrt{b^2-4}+4\sqrt{c^2-1}+2\sqrt{d^2-4} \leq (a+c)(b+d)$$

a určete, pro které hodnoty přirozených čísel a^2, b^2, c^2, d^2 nastane rovnost.

Jaroslav Zhouf

Úloha 280

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x(x^2+1) &= y^3+1, \\ y(y^2+1) &= z^3+1, \\ z(z^2+1) &= x^3+1. \end{aligned}$$

Jaroslav Švrček

Dále uvádíme řešení úloh 275 a 276, jejichž zadání jsme zveřejnili v prvním čísle letošního (31.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 275

Uvažujme rovnostranný trojúhelník ABC se stranou délky 60 a bod P strany AB ve vzdálenosti 40 od bodu A. Paprsek z bodu P se od strany BC odrazil v bodě Q a po odrazu od strany CA dopadl opět do bodu P. Určete vzdálenost bodů B a Q.

Pavel Calábek