[3] Mathematical Kangaroo [online]. Paříž, 2022 [cit. 29.4.2022]. Dostupné z: https://support.aksf.org/default.aspx

[4] Association Kangourou sans Frontieres [online]. Paříž, 2022 [cit. 19.4.2022]. Dostupné z: http://aksf.org/

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část naší pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 31. 12. 2022 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz.

Úloha 279

Dokažte, že pro všechna reálná čísla $a \geq 1$, $b \geq 2$, $c \geq 1$, $d \geq 2$ platí nerovnost

$$4\sqrt{a^2-1}+2\sqrt{b^2-4}+4\sqrt{c^2-1}+2\sqrt{d^2-4} \leq (a+c)(b+d)$$

a určete, pro které hodnoty přirozených čísel a^2, b^2, c^2, d^2 nastane rovnost.

Jaroslav Zhouf

Úloha 280

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x(x^2+1) &= y^3+1, \\ y(y^2+1) &= z^3+1, \\ z(z^2+1) &= x^3+1. \end{aligned}$$

Jaroslav Švrček

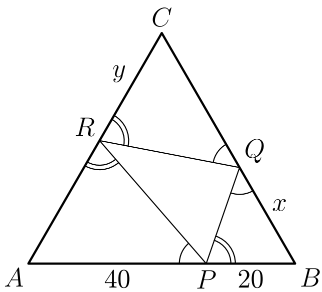
Dále uvádíme řešení úloh 275 a 276, jejichž zadání jsme zveřejnili v prvním čísle letošního (31.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 275

Uvažujme rovnostranný trojúhelník ABC se stranou délky 60 a bod P strany AB ve vzdálenosti 40 od bodu A. Paprsek z bodu P se od strany BC odrazil v bodě Q a po odrazu od strany CA dopadl opět do bodu P. Určete vzdálenost bodů B a Q.

Pavel Calábek

Řešení. Označme R bod dopadu paprsku na stranu CA. Z rovnosti úhlů dopadu a odrazu paprsku v bodě Q plyne shodnost úhlů PQB a CQR. Odtud a z rovnosti vnitřních úhlů rovnostranného trojúhelníku ABC u vrcholů B a C plyne podobnost trojúhelníků BPQ a CRQ. Podobně z rovnosti úhlů dopadu a odrazu paprsku v bodě R plyne, že tyto dva trojúhelníky jsou navíc podobné trojúhelníku ARP. Ze zadání snadno dopočteme $|PB| = 20$, označme dále x hledanou délku úsečky BQ a y délku úsečky CR.



Z podobností trojúhelníků BPQ, CRQ a BPQ, ARP plyne (po úpravě)

$$\begin{aligned} \frac{20}{x} &= \frac{|BP|}{|BQ|} = \frac{|CR|}{|CQ|} = \frac{y}{60-x}, \\ \frac{20}{x} &= \frac{|BP|}{|BQ|} = \frac{|AR|}{|AP|} = \frac{60-y}{40} = \frac{3}{2} - \frac{y}{40}. \end{aligned} \tag{1}$$

Z první rovnice soustavy (1) obdržíme

$$y = \frac{1200}{x} - 20.$$

Dosazením do druhé rovnice soustavy (1) za y dostaneme

$$\frac{20}{x} = \frac{3}{2} - \frac{30}{x} + \frac{1}{2}$$

a odsud již snadno vypočteme $x = 25$.

Hledaná vzdálenost vzdálenost bodů B a Q je 25.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Lukáš*

Lukášek z G Jablonec nad Nisou, U Balvanu, *Lenka Poljaková* a *Štěpán Pospíšil*, oba z GJŠ v Přerově.

Úloha 276

Určete počet všech čtyřmístných čísel, v nichž je součet posledních tří číslic roven trojnásobku součtu prvních tří číslic.

Jaroslav Zhouf

Řešení. Označme hledané číslo $\overline{abcd}$. Jeho číslice a, b, c, d jsou z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $a \neq 0$. Podle zadání má platit

$$b + c + d = 3(a + b + c),$$

což po úpravě dává

$$d = 3a + 2(b + c).$$

Jelikož d je číslice desítkové soustavy, vidíme odtud, že nutně $a \in \{1, 2, 3\}$. Uvažujme dále tři možnosti:

- Pro $a = 1$ dostaneme $d - 3 = 2(b + c)$, což jednoznačně určuje číslici d pro $b + c \in \{0, 1, 2, 3\}$. Číslice b a c pak můžeme volit $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ způsoby.
- Pro $a = 2$ dostaneme $d - 6 = 2(b + c)$, což jednoznačně určuje číslici d pro $b + c \in \{0, 1\}$. Číslice b a c pak můžeme volit $1 + 2 = 3$ způsoby.
- Pro $a = 3$ dostaneme $d - 9 = 2(b + c)$, což jednoznačně určuje číslici d pro $b + c = 0$. Číslice b a c pak můžeme volit jedním způsobem.

Celkem tedy existuje $10 + 3 + 1 = 14$ čísel dané vlastnosti. Jsou to čísla (v pořadí dle naší konstrukce) 1003, 1015, 1105, 1027, 1117, 1207, 1039, 1129, 1219, 1309, 2006, 2018, 2108 a 3009.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jáchym Kouba*, *Jindřich Kukla*, *Lucien Poljak* a *Lenka Poljaková*, všichni z GJŠ v Přerově, *Kryštof Tahal* z G Jablonec nad Nisou, U Balvanu.

Neúplné řešení zaslal *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců.

Pavel Calábek