FYZIKA

Parametrické kmitání oscilátoru

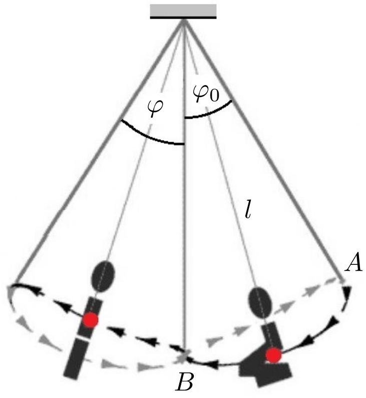
OLDŘICH LEPIL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Obsahem učiva o mechanickém i elektromagnetickém kmitání jsou dva druhy kmitání, které se liší tím, jak oscilátoru dodáváme z vnějšku energii. Je to jednak *vlastní kmitání*, kdy oscilátoru energii dodáme jen v počátečním okamžiku a pak oscilátor tlumeně kmitá, jednak *nucené kmitání*, při němž oscilátoru dodáváme energii nepřetržitě a oscilátor kmitá s konstantní amplitudou a s frekvencí zdroje nuceného kmitání. Učivo o nuceném kmitání zpravidla končí výkladem rezonance a poznatkem, že amplituda nucených kmitů dosahuje maxima při shodě vlastní úhlové frekvence oscilátoru a frekvence zdroje, který kmity v oscilátoru vynucuje. V tomto příspěvku věnujeme pozornost třetí možnosti, kterou je parametrické kmitání oscilátoru.

1. Parametrické kmitání kyvadla

Jako názorný příklad podmínky, při níž lze dosáhnout rezonance mechanického oscilátoru, se obvykle uvádí pohyb dětské houpačky. Tu rozkmitáme vychýlením z rovnovážné polohy a dalším periodickým vnějším silovým působením, např. úderem do houpačky rukou. Tyto silové impulsy musejí mít stejnou periodou, jakou má houpačka. Amplituda houpačky pak zůstane konstantní, nebo se i může postupně zvětšovat. Každé dítě má však zkušenost, že k rozhoupání nepotřebuje trvalého pomocníka u houpačky, ale že stačí, když houpačku jen trochu rozhoupneme a pak si dítě dokáže amplitudu kmitání zvětšovat samo. Děje se to tak, že dítě, které např. na houpačce stojí, při pohybu z největší výchylky (bod A na obr. 1) přejde do dřepu a naopak při průchodu rovnovážnou polohou (bod B), kdy se houpačka pohybuje největší rychlostí, se vztyčí. To se pak opakuje v průběhu periody kmitání vždy dvakrát a tím se dosáhne postupného narůstání amplitudy kmitání.

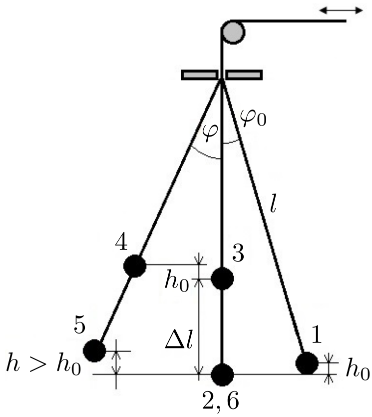


Obr. 1

Z fyzikálního hlediska je pohyb dítěte spojen se změnou těžiště jeho těla, což v podstatě odpovídá periodické změně délky tohoto mechanického oscilátoru a tedy jeho parametru l. Takové kmitání oscilátoru, jehož parametr se v průběhu kmitání řízeným způsobem mění, se označuje jako *parametrické kmitání* a odlišuje se od druhů kmitání, jejichž parametry se v průběhu kmitání nemění. Při určité periodě změny parametrů lze tak dosáhnout udržení amplitudy kmitání, nebo jejího postupného zvětšování i bez vnějšího působení na oscilátor. Dochází k *parametrické rezonanci oscilátoru*. Charakteristické přitom je, že na rozdíl od buzení kmitů vnější silou, které se děje s frekvencí shodnou s vlastní frekvencí oscilátoru, probíhá parametrické buzení kmitů s odlišnou frekvencí, která je dvojnásobkem vlastní frekvence.

Ve výuce můžeme ukázat parametrické kmitání jednoduchým pokusem s kyvadlem v podobě kuličky zavěšené na vlákně, jehož horní část vedeme přes kladku a konec vlákna držíme v ruce (pokus je popsán např. v [1]). Když bude kyvadlo v klidu v rovnovážné poloze, tak ho taháním za konec závěsu nerozkmitáme. Pokud ale kulička kyvadla bude kmitat alespoň s malou amplitudou, pak se při periodickém pohybu konce vlákna s poloviční periodou kmitů kyvadla začne amplituda kmitů postupně zvětšovat a dosáhneme parametrické rezonance.

Na příkladu tohoto jednoduchého oscilátoru objasníme zdánlivý paradox, že se energie kmitání oscilátoru zvětšuje, aniž by kyvadlu byla z vnějšku dodávána energie. Pro výklad použijeme schematické zobrazení předcházejícího pokusu (obr. 2).



Obr. 2

Kyvadlo tvoří vlákno délky l, na němž je zavěšena kulička o hmotnosti m, které vychýlíme z rovnovážné polohy o úhel φ_0 (obr. 2, poloha 1). Když kuličku kyvadla pustíme, pohybuje se do rovnovážné polohy (2), kde má maximální rychlost v_0. V tomto okamžiku zkrátíme závěs kyvadla o délku Δl a kulička se přesune do polohy (3), což ale nemá vliv na velikost rychlosti v_0 a tedy ani na kinetickou energii kyvadla. Pohyb kuličky pokračuje po trajektorii s menším poloměrem, až dosáhne polohy (4), která je o vzdálenost h_0 výše, než v poloze (3) a závěs se odkloní o úhel $\varphi > \varphi_0$. V tomto okamžiku se závěs opět prodlouží o délku Δl a kulička bude v poloze (5), která je ve výšce $h > h_0$ nad rovnovážnou polohou (2). Těleso kyvadla tedy bude mít větší polohovou energii ve srovnání s energií v poloze (1) a rovnovážnou polohou při pohybu vpravo projde rychlostí větší rychlostí v_1 ($v_1 > v_0$).

Jestliže se tento způsob změny délky závěsu kyvadla bude opakovat dvakrát za periodu, bude se celková energie kmitavého pohybu kyvadla zvětšovat. Je to dáno tím, že energie potřebná ke zvednutí kmitajícího tělesa o Δl je větší, než energie, kterou ztratí při přemístění z polohy (4) do polohy (5), tzn. když

$$\Delta l_1 = \Delta l \cos \varphi .$$

Popíšeme přeměny energie při tomto parametrickém kmitání. Poněvadž závěs kyvadla je v rovnovážné poloze (2) napínán tíhovou silou $F_G = mg$ působící na kuličku a odstředivou silou $F_0 = m\frac{v_0^2}{l}$, vykoná se při zkrácení závěsu práce

$$\Delta W_1 = \left(mg + \frac{mv_0^2}{l}\right)\Delta l.$$

Naopak prodloužení závěsu z polohy (4) do polohy (5) odpovídá práce

$$\Delta W_2 = -mg\Delta l \cos\varphi = -mg\Delta l\left(1 - \frac{h}{l}\right).$$

Poněvadž rozdíl mezi h_0 a h je malý ($h \approx h_0$), je zvětšení energie ΔE kyvadla

$$\Delta E = \Delta W_1 + \Delta W_2 =$$

$$= mv_0^2\frac{\Delta l}{l}\left(1 - \frac{gh}{v_0^2}\right) = 2\frac{\Delta l}{l}E_0\left(1 - \frac{h}{2h_0}\right) \approx 3\frac{\Delta l}{l}E_0,$$

kde $v_0^2 = 2gh_0$, $\frac{1}{2}mv_0^2 = E_0$.

Popsané přeměny energie však nezahrnují reálné tlumení pohybu kyvadla, při němž se ztrácí část energie kmitání v závislosti na součiniteli tlumení δ. Za polovinu periody se tak počáteční energie pohybu kyvadla E_0 změní na hodnotu

$$E_1 = E_0\mathrm{e}^{-\delta T}.$$

Pokud je tlumení oscilátoru malé ($\delta T < 0{,}1$), dojde při pohybu kyvadla jen k malému úbytku energie

$$\Delta E_1 = E_0 - E_1 = E_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\delta T}\right) = E_0\delta T.$$

Abychom dosáhli parametrické rezonance, tzn. udržení, popř. zvětšení amplitudy kmitání, je třeba, aby $\Delta E > \Delta E_1$. Tento požadavek ovlivňuje tzv. *hloubku modulace parametru* $\frac{\Delta l}{l}$, pro kterou přibližně platí

$$\frac{\Delta l}{l} \approx \frac{1}{Q},$$

kde Q je *činitel jakosti oscilátoru* (viz např. [2]). Čím větší je činitel jakosti oscilátoru, tím menší změny parametru jsou nutné, aby se kmitání oscilátoru udrželo.

Parametrické kmitání jednoduchého kyvadla může nastat i za jiných podmínek. Kdyby např. tělesem kyvadla byla ocelová kulička a pod její rovnovážnou polohu bychom umístili elektromagnet, dosáhli bychom urychlení kyvadla a tím náhrady ztrát energie periodickým zapínáním elektromagnetu v okamžiku, kdy se kulička blíží do rovnovážné polohy, a vypnutím elektromagnetu v okamžiku, kdy kulička projde rovnovážnou polohou. Podobně jako při houpání na houpačce je tedy pro dosažení parametrické rezonance nutné měnit zvolený parametr s dvojnásobnou frekvencí, než je frekvence vlastního kmitání soustavy.

2. Model parametrického kmitání oscilátoru

Podmínky vzniku parametrické rezonance si můžeme ověřit jednoduchým počítačovým modelem. Předpokládejme, že délka závěsu kyvadla se bude pohybovat okolo střední hodnoty l_0 s amplitudou $A = \Delta l$ podle vztahu

$$l(t) = l_0 - A \sin(\varOmega t),$$

kde $\varOmega$ je budicí frekvence vnějšího působení na kyvadlo. Diferenciální rovnice tohoto oscilátoru pak bude vyjádřena vztahem

$$ma + bv + \frac{mg}{l_0 - A\sin(\varOmega t)} x = 0,$$

kde m je hmotnost kyvadla a b je konstanta úměrnosti mezi odporovou silou a rychlostí tlumení[1]. Z rovnice určíme zrychlení a a pro $m = 1$ kg sestavíme dynamický model parametrického kmitání kyvadla (veličina h je časový krok: $h = 0{,}05$ s):

$$\mathtt{a{=}{-}}\frac{\mathtt{g}}{\mathtt{l_0{-}A{*}sin(\Omega{*}t)}}\mathtt{x{-}b{*}v}$$

$$\mathtt{x_{i+1}{=}x_i{+}v_i{*}h}$$

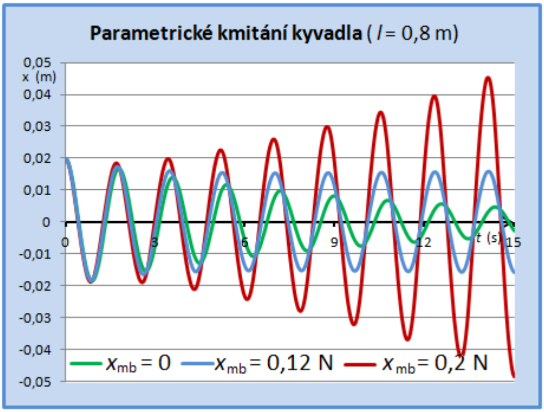
$$\mathtt{v_{i+1}{=}v_i{+}a_i{*}h}$$

$$\mathtt{t_{i+1}{=}t_i{+}h}$$

Pokud bude budicí frekvence menší než dvojnásobek vlastní úhlové frekvence kyvadla ($\omega_\mathrm{b} < 2\omega_0$), bude výsledné kmitání tlumené (zelená křivka na obr. 3). Při dvojnásobné frekvenci dochází k parametrické rezonanci a v závislosti na amplitudě změn délky kyvadla (parametrické modulaci)

[1] Ve standardní diferenciální rovnici mechanického oscilátoru je tlumení vyjádřeno součinitelem tlumení $\delta = \frac{b}{2m}$ a úhlová frekvence tlumeného oscilátoru je $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

vzniknou buď netlumené kmity s konstantní amplitudou (modrá křivka), nebo se amplituda kmitů bude postupně zvětšovat (červená křivka).

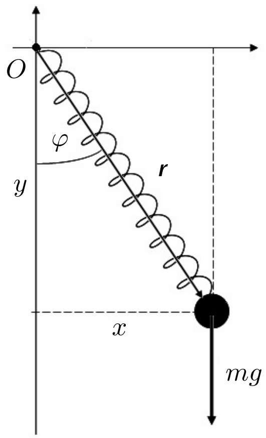


Obr. 3

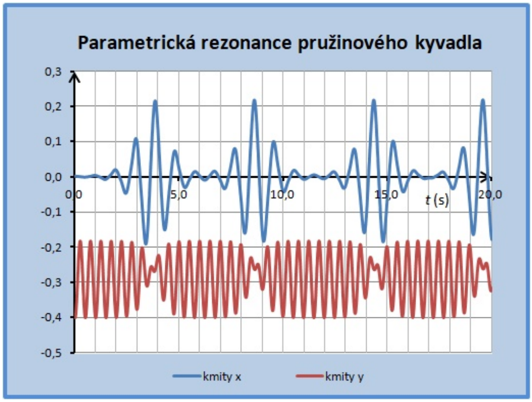
V případě kyvadla délky $l_0 = 0{,}8$ m je $\omega_0 \approx 3{,}5\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ a parametrická rezonance nastane při $\Omega \approx 7{,}0\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Uvedené hodnoty jsou jen přibližné, poněvadž se v počítačovém modelu mohou poněkud lišit podle volby velikosti časového kroku. Podle zvolené hodnoty součinitele tlumení b je pak třeba nastavit velikost amplitudy A budicích kmitů. Při malé amplitudě nedojde v průběhu periody k náhradě ztrát vzniklých tlumením a soustava kmitá tlumeně. Rezonančního zesílení kmitů dosáhneme změnou amplitudy A pomocí posuvníku v menu počítačového modelu. Model je zájemcům dostupný v sešitu aplikace MS Excel (ZDE).

3. Parametrická rezonance pružinového kyvadla

Příkladem oscilátoru, v němž může nastat parametrická rezonance, je také *pružinové kyvadlo* (obr. 4). Jestliže rozkmitáme těleso kyvadla přesně ve směru osy pružiny, bude kyvadlo konat jen *podélné kmity* ve svislém směru s úhlovou frekvencí danou parametry kyvadla, tzn. hmotností m a tuhostí pružiny k. Jestliže se však závaží třeba jen náhodně od svislého směru odchýlí, vzniknou *příčné kmity* v horizontálním směru, jejichž perioda je určena měnící se délkou pružiny, tedy parametru l kyvadla. Při vhodné volbě parametrů pružinového kyvadla lze dosáhnou poměru úhlových frekvencí podélných a příčných kmitů 2 : 1 a dojde k parametrické rezonanci. Soustava pružinového oscilátoru se chová jako dvojice vázaných oscilátorů, v níž dochází k periodické výměně energie příčných a podélných kmitů a to se projeví vznikem rázů (obr. 5). Ten to děj je však nestabilní a již při nepatrné změně některého z parametrů dochází k chaotickému pohybu tělesa kyvadla. Podrobněji je tento zajímavý případ parametrického kmitání popsán v příspěvku [3], k němuž je připojen sešit aplikace MS Excel s jednoduchým programem, který umožňuje interaktivně si ověřit vznik parametrické rezonance.



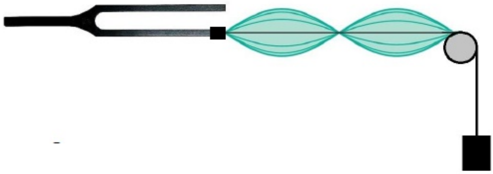
Obr. 4



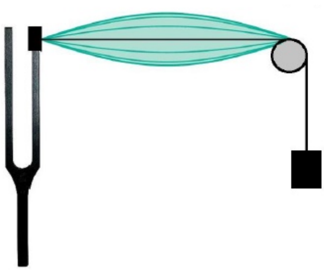
Obr. 5

4. Meldeův pokus

I když parametrická rezonance našla praktické uplatnění až v technické praxi 2. poloviny 20. století, její historie je delší. Zkoumal ji v roce 1859 německý fyzik *Franz Melde* (1832–1901), který studoval interferenci vlnění v řadě bodů a objevil tak stojaté vlnění, kterému dal i název. K tomu vytvořil zařízení, které je z historie fyziky známo jako *Meldeův pokus* a patří ke klasickým experimentům, dnes již zmodernizovaným do nejrůznějších podob (viz např. [4]). Melde zkoumal vznik stojatého vlnění v pružném vlákně, jehož jeden konec byl pevný a druhý byl spojen s raménkem ladičky (obr. 6). Přitom zjistil zajímavý rozdíl, když ladička byla buď v poloze (a), nebo v poloze (b). Při určitém napětí vlákna, které lze měnit zátěží na pevném konci, nastane rezonance a na vlákně vzniknou kmitny a uzly stojatého vlnění.



a)



b)

Obr. 6

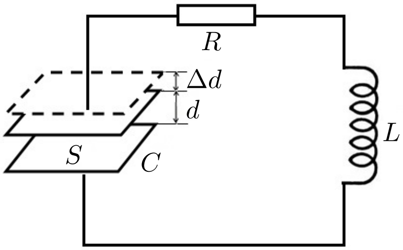
Obr. 6a je zobrazuje případ, kdy je volbou závaží nastaveno napětí vlákna tak, aby rezonance nastala při 2. harmonické frekvenci, takže se na vlákně vytvoří celá stojatá vlna. Vlákno je raménkem ladičky rozkmitáváno příčně, takže se napětí vlákna nemění a je to obdoba dětské houpačky rozkmitávané vnější silou. Vlákno koná nucené kmitání.

V případě na obr. 6b je však situace odlišná. Raménko ladičky ovlivňuje nepatrnými výchylkami délku vlákna, tedy jeho parametr. Tím se periodicky mění napětí vlákna, nastává tzv. parametrické buzení kmitů ve vlákně a dochází k parametrické rezonanci. Na vlákně vznikne při stejné frekvenci ladičky stojatá vlna o dvojnásobné vlnové délce, takže zobrazena je jen polovina vlny.

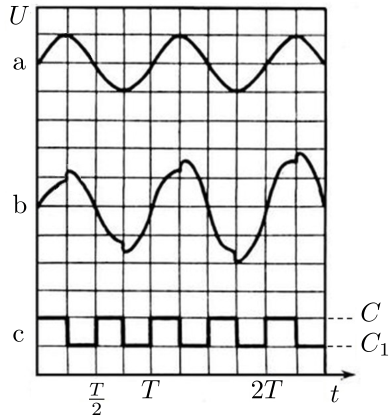
5. Parametrické kmitání elektromagnetického oscilátoru

Podstatu parametrického kmitání jsme si ukázali na příkladech mechanických oscilátorů. Ty se však praktického využití nedočkaly. Současná technická praxe využívá parametrické zesilování signálů v parametrických zesilovačích ve vysokofrekvenční elektronice, kvantové optice nebo radioastronomii. Základní předností parametrických zesilovačů je v těchto případech hlavně nízká hladina rušivého šumu.

Princip parametrického zesilování elektromagnetického kmitání si ukážeme na jednoduchém modelu oscilačního obvodu s měnitelnou kapacitou (obr. 7).



Obr. 7



Obr. 8

Kapacita deskového kondenzátoru je určena známým vztahem

$$C = \varepsilon \frac{S}{d},$$

kde ε je permeabilita prostředí, S je plocha desek kondenzátoru a d je jejich vzdálenost. To znamená, že při zvětšení vzdálenosti desek o Δd se kapacita zmenší na hodnotu $C_1 < C$. Když napětí U na deskách kondenzátoru dosáhne největší hodnoty (viz obr. 8a), bude náboj desek $q = CU$. V tomto okamžiku zvětšíme vzdálenost desek o Δd a kapacita kondenzátoru se zmenší na C_1 (viz obr. 8c). Náboj kondenzátoru se nezmění, ale jeho napětí se zvětší. Přitom se vykoná práce potřebná k překonání sil elektrického pole mezi deskami a tím se zvětší energie kondenzátoru o ΔE:

$$\Delta E = \frac{q^2}{2C_1} - \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2C}\left[\frac{C}{C_1} - 1\right] = E_0 \frac{\Delta d}{d} = E_0 \mu,$$

kde $E_0 = \frac{q^2}{2C}$ je energie oscilátoru před změnou kapacity kondenzátoru a $\frac{\Delta d}{d} = \mu$ je opět modulace parametru.

Od okamžiku dosažení maximálního napětí se kondenzátor začíná přes cívku vybíjet a napětí na kondenzátoru se zmenšuje. Když dosáhne nulové hodnoty, znovu se desky posunou na původní místo a kapacita kondenzátoru se zvětší. Tento děj se opakuje dvakrát v průběhu jedné periody, tedy s poloviční periodou než je perioda vlastního kmitání oscilátoru. Při každém cyklu se také zvětšuje celková energie kmitání oscilátoru, a pokud přírůstek je větší než ztráty energie, amplituda napětí na kondenzátoru narůstá a nastává parametrická rezonance oscilátoru. Podobně jako u mechanického parametrického kmitání je parametrická rezonance ovlivněna činitelem jakosti oscilátoru. Čím větší je činitel jakosti Q, tím menší může být modulace parametru, při níž dojde k parametrické rezonanci.

Pro výklad jsme využili zjednodušený model, který by bylo obtížné realizovat. V technické praxi plní funkci proměnného parametru elektronické součástky. Jednou z nich je tzv. kapacitní dioda – *varikap*, jejíž přechod PN zapojený v závěrném směru se chová jako kondenzátor. Kapacita varikapu je závislá na připojeném napětí, které se mění podle vztahu

$$C = C_0(1 + \mu \sin \varOmega t),$$

kde μ je modulace parametru a $\varOmega$ je úhlová frekvence buzení kmitů s dvojnásobnou frekvencí, než je frekvence zesilovaného signálu.

Jako příklad jsme zvolili změnu kapacity, ale obdobným způsobem lze získat parametrické kmitání také změnou indukčnosti oscilačního obvodu. Velmi názorně je to ukázáno ve výukovém videu [6], které je shrnutím poznatků o parametrickém kmitání.

Literatura

[1] *Patč, B.*: Pokusy s kyvadly. Veletrh nápadů učitelů fyziky 2, Plzeň, 1997. Dostupné z: `http://vnuf.cz/sbornik_old/Veletrh_02/02_18_Patc.html`

[2] *Lepil, O.*: Rezonanční křivka – portrét oscilátoru. MFI, roč. 29 (2020), č. 3, s. 201–213. Dostupné z: `https://mfi.upol.cz/files/29/2903/mfi_2903_201_213.pdf`

[3] *Lepil, O.*: Fázový portrét oscilátoru. MFI, roč. 29 (2020), č. 4, s. 280–297. Dostupné z: `https://mfi.upol.cz/files/29/2904/mfi_2904_280_297.pdf`

[4] *Lepil, O.*: Tři pokusy s budičem mechanických kmitů. MFI, roč. 11 (2001), č. 4, s. 215.

[5] *Malov, N. N.*: Osnovy teorii kolebanij. Prosvěščenije, Moskva, 1971.

[6] Parametrische Anregung von Schwingungen. IWF, Göttingen 1986. Dostupné z: `https://av.tib.eu/media/14288`