ZPRÁVY

10. ročník CPSJ

Po dvou letech improvizací, způsobených pandemií covidu-19, se ve dnech 15. až 18. května 2022 v Karlově pod Pradědem konal již 10. ročník Česko-polsko-slovenské matematické soutěže juniorů (CPSJ).[1)] Vznik této soutěže iniciovali polští kolegové, kteří chtěli vítěze své Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów (OMG) nechat nasát atmosféru mezinárodní soutěže a motivovat je tak k účasti na mezinárodních soutěžích v dalších letech.[2)]

Český reprezentační výběr byl sestaven na základě výsledků krajských kol kategorií A a C 71. ročníku Matematické olympiády a následného výběrového soustředění z žáků, kteří navštěvují nejvýše první ročník střední školy (kvintu osmiletých gymnázií). Účast v reprezentaci si vybojovali: *Anastasia Bredikhina* (5/8), Gymnázium Jana Keplera v Praze 6, *Dominik Doležel* (5/8), Gymnázium Brno, tř. Kapitána Jaroše, *Viktor Gola* (1/4), Masarykovo gymnázium, SZŠ a VOŠ Vsetín, *Erik Ježek* (9), Základní škola Praha 10, Švehlova, *Pavla Šimová* (5/8), Gymnázium Šumperk a *Patrik Štencel* (1/4), Mendelovo gymnázium v Opavě.

Vedoucím české delegace byli *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.,* z PřF UP v Olomouci, *doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.,* z MFF UK v Praze a *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.,* z PřF UP v Olomouci.

Všichni účastníci se sešli v neděli 15. května v hotelu Karlov v Karlově pod Pradědem. V pondělí na ně čekala soutěž jednotlivců, v níž po dobu 3,5 hodiny řešili pět úloh. Zadání příkladů obdrželi soutěžící jak v mateřském jazyce, tak i v angličtině, řešení mohli odevzdávat ve svém mateřském jazyce. Po odpočinkovém programu a prezentaci svých řešení byli navečer soutěžící rozlosováni do šesti tříčlenných družstev; v každém z nich bylo po jednom českém, polském a slovenském účastníkovi. Druhý den pak tyto týmy v soutěži družstev řešily po dobu pěti hodin šest úloh – po dvou v češtině, polštině a slovenštině. Soutěžící si tak vyzkou-

[1)] v roce 2020 byla soutěž zrušena, v roce 2021 se konala online.

[2)] V České republice a na Slovensku řeší žáci MO v pěti různých věkových kategoriích na základních školách (a v odpovídajících ročnících víceletých gymnázií) a dále ve třech věkových kategoriích na středních školách. Celostátním kolem však soutěž končí pouze v kategorii A. V Polsku dlouhodobě existovala matematická olympiáda (OM), kterou řešili žáci všech ročníků středních škol. Pro žáky druhého stupně základních škol (v Polsku dříve čtyřletá gymnázia) vznikla později matematická olympiáda OMG (ukončená třetím (celostátním) kolem) – po poslední školské reformě v Polsku před 5 lety, kdy byla gymnázia spojena se základními školami, byla OMG přejmenována (nyní nese název Olimpiada Matematyczna Juniorów).

šeli týmovou spolupráci, při níž musel každý svým spolusoutěžícím objasnit zadání úlohy i své řešení.

Ze soutěže jednotlivců (10. CPSJ), Karlov pod Pradědem, 16. 5. 2022

Jako obvykle uspěli v soutěži jednotlivců nejlépe polští soutěžící. Na prvním místě se umístil polský soutěžící *Michał Jacek*, který získal 24 z 25 možných bodů. Z českých soutěžících byl nejlepší *Patrik Štencel*, který obsadil dělené čtvrté a páté místo, v první polovině účastníků se ještě umístil *Erik Ježek*, a to na děleném pátém až osmém místě. Podrobné výsledky jak soutěže jednotlivců, tak i soutěže družstev můžete najít na stránkách Matematické olympiády. Vzorová řešení (v polštině) soutěží jednotlivců i družstev na stránkách polských kolegů.

Na závěr uvádíme zadání soutěžních úloh, přitom úlohy soutěže družstev uvádíme tak, jak je obdrželi soutěžící.

Soutěž jednotlivců

(16. 5. 2022)

1. Nechť $n \geq 3$ je přirozené číslo. Předpokládejme, že $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je n navzájem různých reálných čísel. V závislosti na n určete nejmenší možný počet různých hodnot mezi n čísly

$$a_1 + a_2,\ a_2 + a_3,\ \ldots,\\ a_{n-1} + a_n,\ a_n + a_1.$$

(Josef Tkadlec, CZE)

2. V oboru celých čísel řešte následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 &= yz + 1, \\ y^2 &= zx + 1, \\ z^2 &= xy + 1. \end{aligned}$$

(Jaroslav Švrček, CZE)

3. V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ platí

$$|\sphericalangle EAB| = 60^\circ,\\ |\sphericalangle ABC| = 100^\circ,\\ |\sphericalangle BCD| = 140^\circ.$$

Dokažte, že tento pětiúhelník je možno umístit do kruhu o poloměru $\frac{2}{3}|AD|$.

(Michał Kieza, POL)

4. Nechť a, b jsou přirozená čísla s vlastností $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$. Dokažte, že platí

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{2ab} > \sqrt{2}.$$

(Łukasz Bożyk & Arkadiusz Męcel, POL)

5. Řekneme, že přirozené číslo n nazveme *dobré*, právě když splňuje následující podmínku:

> Jestliže je některé přirozené číslo dělitelné každým z devíti čísel $n+1$, $n+2, \ldots, n+9$, potom je také dělitelné číslem $n+10$.

Kolik přirozených čísel n je dobrých?

(Josef Tkadlec, CZE)

Soutěž družstev

(17. 5. 2022)

1. Určete největší možnou hodnotu výrazu $ab+bc+2ac$ pro nezáporná reálná čísla a, b, c, jejichž součet je 1.

(Patrik Bak, SVK)

2. Na tabuli je napísané číslo 2022. V každom kroku nahradíme niektorú z číslic 2 číslom 2022. Napríklad

$$2022 \Rightarrow 20\underline{2022}2 \Rightarrow 20202\underline{2022}2 \Rightarrow \dots$$

Po koľkých krokoch môže byť na tabuli napísané číslo deliteľné 22? Určte všetky možnosti.

(Pavel Calábek, CZE)

3. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC w taki sposób, że $FB = BD$, $DC = CE$ oraz proste EF i BC są równoległe. Styczna do okręgu opisanego na trójkącie DEF w punkcie F przecina odcinek AD w punkcie P. Symetralna odcinka EF przecina odcinek AC w punkcie Q. Wykaż, że proste PQ i BC są równoległe.

(Michal Janík, CZE)

4. Najděte všechny trojice (a, b, c) celých čísel, které vyhovují rovnicím $a + b = c$ a $a^2 + b^3 = c^2$.

(Łukasz Bożyk, POL)

5. Je daný pravidelný deväťuholník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ s dĺžkou strany 1. Uhlopriečky A_3A_7 a A_4A_8 sa pretnú v bode P. Zistite dĺžku úsečky PA_1.

(Łukasz Bożyk, POL)

6. Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 4$ o następującej własności:

Każde pole tabeli $n \times n$ można pomalować na biało albo na czarno w taki sposób, aby każde pole tej tabeli miało ten sam kolor, co dokładnie dwa sąsiadujące z nim pola. (Pola są *sąsiadujące*, jeśli mają dokładnie jeden wspólny bok.)

Ile jest różnych kolorowań pól tabeli 6×6 spełniających powyższe warunki?

(Jaroslav Švrček, CZE)

Příští, jedenáctý ročník soutěže se uskuteční v květnu 2023 na Slovensku.

Pavel Calábek

63. ročník Mezinárodní matematické olympiády

Letošní 63. ročník Mezinárodní matematická olympiády proběhl v červenci 2022 po dvouleté přestávce způsobené koronavirovou pandemií opět prezenčně, a to v norském hlavním městě Oslu. Aktuálního ročníku soutěže se zúčastnilo 589 soutěžících ze 104 zemí celého světa.

Jako první do Norska přicestovali vedoucí národních delegací, jejichž hlavním úkolem bylo vybrat šestici úloh pro soutěž z 33 předem připrave-