Soutěž družstev

(17. 5. 2022)

1. Určete největší možnou hodnotu výrazu $ab+bc+2ac$ pro nezáporná reálná čísla a, b, c, jejichž součet je 1.

(Patrik Bak, SVK)

2. Na tabuli je napísané číslo 2022. V každom kroku nahradíme niektorú z číslic 2 číslom 2022. Napríklad

$$2022 \Rightarrow 20\underline{2022}2 \Rightarrow 20202\underline{2022}2 \Rightarrow \dots$$

Po koľkých krokoch môže byť na tabuli napísané číslo deliteľné 22? Určte všetky možnosti.

(Pavel Calábek, CZE)

3. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC w taki sposób, że $FB = BD$, $DC = CE$ oraz proste EF i BC są równoległe. Styczna do okręgu opisanego na trójkącie DEF w punkcie F przecina odcinek AD w punkcie P. Symetralna odcinka EF przecina odcinek AC w punkcie Q. Wykaż, że proste PQ i BC są równoległe.

(Michal Janík, CZE)

4. Najděte všechny trojice (a, b, c) celých čísel, které vyhovují rovnicím $a+b=c$ a $a^2+b^3=c^2$.

(Łukasz Bożyk, POL)

5. Je daný pravidelný deväťuholník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ s dĺžkou strany 1. Uhlopriečky A_3A_7 a A_4A_8 sa pretnú v bode P. Zistite dĺžku úsečky PA_1.

(Łukasz Bożyk, POL)

6. Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 4$ o następującej własności:

> Każde pole tabeli $n \times n$ można pomalować na biało albo na czarno w taki sposób, aby każde pole tej tabeli miało ten sam kolor, co dokładnie dwa sąsiadujące z nim pola. (Pola są *sąsiadujące*, jeśli mają dokładnie jeden wspólny bok.)

Ile jest różnych kolorowań pól tabeli 6×6 spełniających powyższe warunki?

(Jaroslav Švrček, CZE)

Příští, jedenáctý ročník soutěže se uskuteční v květnu 2023 na Slovensku.

Pavel Calábek

63. ročník Mezinárodní matematické olympiády

Letošní 63. ročník Mezinárodní matematická olympiády proběhl v červenci 2022 po dvouleté přestávce způsobené koronavirovou pandemií opět prezenčně, a to v norském hlavním městě Oslu. Aktuálního ročníku soutěže se zúčastnilo 589 soutěžících ze 104 zemí celého světa.

Jako první do Norska přicestovali vedoucí národních delegací, jejichž hlavním úkolem bylo vybrat šestici úloh pro soutěž z 33 předem připravených návrhů rozdělených v takzvaném shortlistu do čtyř kategorií (algebra, kombinatorika, geometrie, teorie čísel). Je potěšující, že mezi těmito 33 návrhy byly i 3 české a 3 slovenské návrhy. Byť byly všechny tyto návrhy hodnoceny pochvalně, do vlastní soutěže se nakonec dostal jen jeden z nich, konkrétně geometrická úloha *Patrika Baka*, a to jako první úloha druhého dne (zadání všech šesti úloh najdete na konci této zprávy).

Soutěžící a pedagogičtí vedoucí dorazili do Osla o tři dny později. Ubytování bylo zajištěno v hotelech Scandic St. Olavs a Scandic Holberg v centru města. Pro soutěžící bylo k dispozici rovněž přilehlé volnočasové centrum příznačně pojmenované Rebel.

Vlastní soutěž proběhla tradičně ve dvou dnech 11. a 12. července na půdě místní univerzity. Soutěžící měli každý den 4,5 hodiny na řešení tři obtížných úloh. Za každou z nich mohli získat až 7 bodů. Připomeňme, že zhruba polovina soutěžících si z olympiády přiveze medaili, přičemž počet udělených zlatých (G), stříbrných (S) a bronzových (B) medailí je v přibližném poměru 1 : 2 : 3.

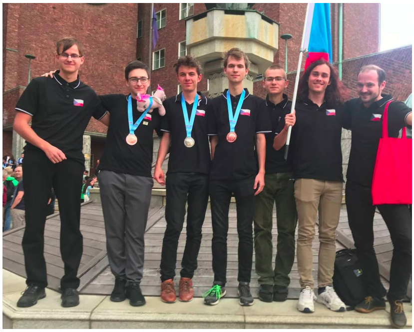
Českou republiku reprezentoval tým ve složení *Matouš Šafránek*, *Michal Janík*, *Samuel Rosiar* (všichni z Gymnázia J. Keplera v Praze), *Benedikt Bareš* z Gymnázia Dobruška, *Zdeněk Pezlar* z Gymnázia Brno, tř. Kpt. Jaroše a *Robert Jaworski* z Gymnázia v Praze 8, Ústavní. Robert Jaworski zastoupil vítěze celostátního kola *Tomáše Flídra* z gymnázia v Kojetíně, který se bohužel nemohl soutěže zúčastnit ze zdravotních důvodů.

Vedoucím týmu byl *Josef Tkadlec* z Harvardovy univerzity a pedagogickým vedoucím *Michal Rolínek* ze společnosti G-Research, která výpravu rovněž finančně podpořila.

Přehled výsledků českého týmu uvádíme v tabulce:

		Body za úlohu							Cena
Umístění		1	2	3	4	5	6	Σ	
112.–145.	Matouš Šafránek	7	7	0	7	1	7	29	S
214.–229.	Michal Janík	7	7	0	7	5	0	26	B
214.–229.	Samuel Rosiar	6	7	1	7	5	0	26	B
394.–419.	Zdeněk Pezlar	7	7	0	0	1	0	15	HM
429.–435.	Benedikt Bareš	7	3	0	1	2	0	13	HM
429.–435.	Robert Jaworski	7	3	0	1	1	1	13	HM
	Celkem	41	34	1	23	15	8	122	

Čeští soutěžící přivezli ze soutěže jednu stříbrnou medaili, dvě bronzové medaile a tři čestná uznání (HM) za bezchybné vyřešení alespoň jedné úlohy.



České reprezentační družstvo ve složení (zleva): Robert Jaworski, Michal Janík (bronz), Matouš Šafránek (stříbro), Samuel Rosiar (bronz), Benedikt Bareš, Zdeněk Pezlar a Michal Rolínek (pedagogický vedoucí).

Pro srovnání uvádíme i výsledky slovenského týmu, kterému se letos dařilo lépe:

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	5	6	Σ	Cena
112.–145.	Eliška Macáková	7	7	2	7	5	1	29	S
247.–268.	Matej Vasky	7	7	1	7	1	1	24	B
247.–268.	Jakub Šošovička	7	7	1	7	2	0	24	B
269.–285.	Viktor Balan	7	7	0	1	1	7	23	B
269.–285.	Viktor Imrišek	7	7	0	7	2	0	23	B
429.–435.	Samuel Koribanič	5	7	0	0	1	0	13	HM
	Celkem	40	42	4	29	12	9	136	

V neoficiálním pořadí států suverénně zvítězila Čína, která se stejně jako několik dalších asijských států kvůli místním koronavirovým opatřením účastnila distančně. Všech šest čínských soutěžících navíc získalo plný počet bodů, což je úžasný výkon, který se naposledy podařil v roce 1994 týmu USA. Kromě čínských studentů na plný počet 42 bodů dosáhli ještě čtyři další soutěžící.

Na pomyslné druhé a třetí příčce se těsně za sebou dle očekávání seřadily Korea a USA, překvapením je naopak umístění v první desítce pro Rumunsko (5.) a Německo (7.) – v obou případech po více jak 10 letech.

Česká republika skončila v (první) polovině startovního pole na 52. příčce o šest příček za Slovenskem. Kompletní výsledky jsou dostupné na adrese `imo-official.org`. Podrobné informace najdete také na stránce `http://www.matematickaolympiada.cz/`.

Úlohy byly letos snazší než v předchozích letech, jak naznačuje výkon čínského týmu. Konkrétně druhá úloha byla (co do počtu udělených bodů) nejsnazší dvojkou za posledních deset let. Totéž platí i o třetí a čtvrté úloze, navíc zbylé tři úlohy byly za posledních deset let „druhé nejsnazší“. Na zisk bronzové medaile tak bylo letos potřeba nasbírat bezprecedentních 23 bodů – loni stačilo na zisk bronzové medaile pouhých 12 bodů a za 24 bodů už se bralo zlato.

Na závěr uvádíme zadání soutěžních úloh (v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla).

11. července 2022

1. Banka města Oslo razí mince dvou druhů: aluminiové (značené A) a bronzové (značené B). Magnus má n aluminiových mincí a n bronzových mincí v řadě v nějakém počátečním pořadí. *Blokem* rozumíme podposloupnost sousedních mincí stejného druhu. Pro dané pevné kladné celé číslo $k \le 2n$ provádí Magnus opakovaně následující krok: určí nejdelší blok obsahující k-tou minci zleva a přesune všechny mince z tohoto bloku na levý konec řady. Například pro $n = 4$, $k = 4$ a počáteční pořadí $AABBBABA$ vypadá proces takto:

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to$$
$$\to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to$$
$$\to BBB\underline{B}AAAA \to \dots$$

Najděte všechny dojice (n, k) splňující $1 \le k \le 2n$ takové, že pro každé počáteční pořadí se v nějaký okamžik stane, že levých n mincí je stejného druhu.

(Francie)

2. Označme $\mathbb{R}^+$ množinu kladných reálných čísel. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ existuje právě jedno $y \in \mathbb{R}^+$ splňující

$$xf(y) + yf(x) \le 2.$$

(Nizozemsko)

3. Nechť k je kladné celé číslo a nechť S je konečná množina lichých prvočísel. Dokažte, že existuje nejvýše jeden způsob (až na otočení a překlopení) jak umístit prvky S podél obvodu kruhu tak, aby součin každých dvou sousedních čísel byl tvaru

$$x^2 + x + k$$

pro nějaké kladné celé číslo x.

(USA)

12. července 2022

4. Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ splňující

$$|BC| = |DE|$$

a uvnitř něj bod T, pro který platí

$$|TB| = |TD|, \quad |TC| = |TE|$$

a

$$|\sphericalangle ABT| = |\sphericalangle TEA|.$$

Přímka AB protne přímky CD a CT postupně v bodech P a Q tak, že body P, B, A, Q leží na přímce v tomto pořadí. Podobně přímka AE protne přímky CD a DT postupně v bodech R a S tak, že body R, E, A, S leží na přímce v tomto pořadí. Dokažte, že body P, S, Q, R leží na jedné kružnici.

(Slovensko)

5. Najděte všechny trojice (a, b, p) kladných celých čísel takových, že p je prvočíslo a platí

$$a^p = b! + p.$$

(Belgie)

6. Nechť n je kladné celé číslo. *Nordický čtverec* je tabulka $n \times n$ vyplněná navzájem různými celými čísly od 1 po n^2. Dvě různá políčka považujeme za sousední, pokud sdílejí stranu. Řekneme, že políčko je *dolík*, pokud je v něm menší číslo než ve všech sousedních políčkách. Řekneme, že posloupnost jednoho či více políček je *krpál*, pokud současně platí:

1. první políčko posloupnosti je dolík,
2. každé další políčko posloupnosti sousedí s předchozím políčkem,
3. čísla v políčkách posloupnosti jsou v rostoucím pořadí.

V závislosti na n určete nejmenší možný celkový počet krpálů v nordickém čtverci.

(Srbsko)

Následující ročník Mezinárodní MO se uskuteční v roce 2023 v Japonsku.

Josef Tkadlec

Informatické olympiády CEOI 2022 a IOI 2022

Po dvou letech distančního soutěžení způsobeného epidemií koronaviru se ve školním roce 2021/22 naše národní i obě mezinárodní olympiády v informatice konaly již opět normální prezenční formou.

Na základě výsledků ústředního kola 71. ročníku Matematické olympiády kategorie P jsme pozvali všechny úspěšné řešitele na tradiční víkendové výběrové soustředění, v němž se určuje složení českých reprezentačních družstev pro mezinárodní olympiády. Letošní výběrové soustředění proběhlo ve druhé polovině dubna formou praktické online soutěže a konečný výběr