Grafy relací

DAG HRUBÝ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Jedním ze základních pojmů moderní algebry je pojem binární relace. Tento pojem byl v minulosti i součástí výuky matematiky na gymnáziu, např. v učebnici *Matematika pro gymnázia, sešit 3* z roku 1978. S koncem období tzv. modernizace výuky matematiky, které u nás probíhalo v letech 1965–1985, zmizel z učiva matematiky na gymnáziu také pojem relace.

Připomeňme, že *binární relací mezi množinami A, B* nazýváme každou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Je-li $A = B$, hovoříme o binární relaci na množině A.

Binární relaci mezi množinami A, B nazýváme *zobrazením množiny A do množiny B*, právě když ke každému prvku x z množiny A existuje právě jedno y z množiny B takové, že uspořádaná dvojice (x, y) patří do této relace.

Reálnou funkcí reálné proměnné f pak rozumíme zobrazení $f\colon M \to \mathbb{R}$, kde $\mathbb{R}$ značí množinu reálných čísel a $M \subseteq \mathbb{R}$.

V článku se budeme věnovat grafům relací $|y| = f(x)$, kde $y = f(x)$ je funkce jedné reálné proměnné. Je zřejmé, že relace $|y| = f(x)$ platí pro ta x, která splňují $f(x) \geq 0$. Řešením nerovnice $f(x) \geq 0$ získáme intervaly, v nichž je tato funkce nezáporná. V těchto intervalech sestrojíme grafy funkcí $y = f(x)$ a také $y = -f(x)$. Sjednocení grafů těchto dvou funkcí pak tvoří graf dané binární relace. Celý postup sestrojování grafu takové relace ukážeme na několika příkladech.

Příklad 1

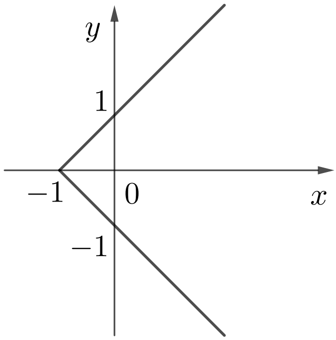
K dané funkci $y = f(x)$ sestrojte graf relace $|y| = f(x)$:

a) $y = x + 1$ b) $y = \sqrt{|x|}$ c) $y = \sin x$

d) $y = \ln x$ e) $y = \mathrm{e}^x$

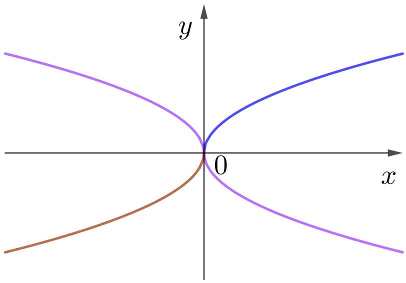
Řešení.

a) Funkci $y = x + 1$ odpovídá relace $|y| = x + 1$. Protože je $|y| \geq 0$, je také $x + 1 \geq 0$, a tedy $x \geq -1$. Pro každé vyhovující y platí $y = x + 1$ a $y = -(x + 1) = -x - 1$ (obr. 1).



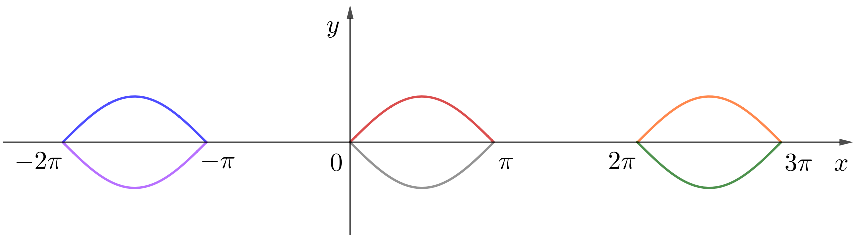
Obr. 1

b) Funkci $y = \sqrt{|x|}$ odpovídá relace $|y| = \sqrt{|x|}$. Protože je $\sqrt{|x|} \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, je také relace $|y| = \sqrt{|x|}$ definovaná pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pro každé vyhovující y pak platí $y = \sqrt{|x|}$ a $y = -\sqrt{|x|}$ (obr. 2).



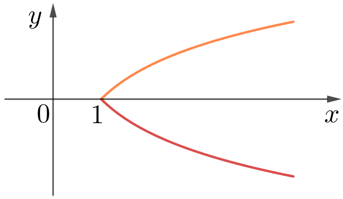
Obr. 2

c) Funkci $y = \sin x$ odpovídá relace $|y| = \sin x$. V intervalu $\langle -3\pi; 3\pi \rangle$ je funkce $y = \sin x$ nezáporná v intervalech $\langle -2\pi; -\pi \rangle$, $\langle 0; \pi \rangle$, $\langle 2\pi; 3\pi \rangle$. V těchto intervalech sestrojíme grafy funkcí $y = \sin x$, $y = -\sin x$ (obr. 3).



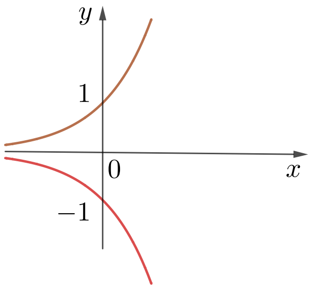
Obr. 3

d) Funkci $y = \ln x$ odpovídá relace $|y| = \ln x$. Funkce $y = \ln x$ je nezáporná v intervalu $\langle 1; +\infty)$. V tomto intervalu sestrojíme grafy funkcí $y = \ln x$ a $y = -\ln x$ (obr. 4).



Obr. 4

e) Funkci $y = \mathrm{e}^x$ odpovídá relace $|y| = \mathrm{e}^x$. Funkce $y = \mathrm{e}^x$ je kladná pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pro každé vyhovující y platí $y = \mathrm{e}^x$ a $y = -\mathrm{e}^x$ (obr. 5).



Obr. 5

Nyní se zaměříme na relace se dvěma absolutními hodnotami.

Příklad 2

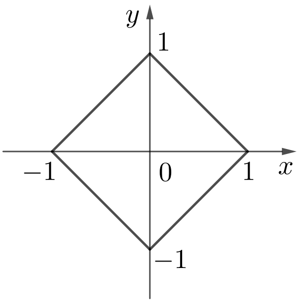
Sestrojte graf relace $|x| + |y| = 1$, resp. $|y| = 1 - |x|$.

Řešení.

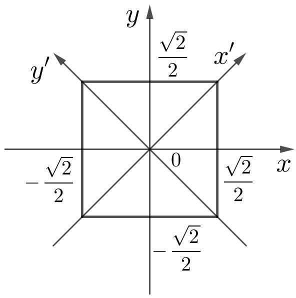
Zřejmě je $x \in \langle -1; 1\rangle$ a $y \in \langle -1; 1\rangle$. Uvážíme-li, jaké podmínky platí pro x a y v jednotlivých kvadrantech, dostaneme funkce: $y = -x + 1$, $y = x + 1$, $y = -x - 1$, $y = x - 1$. Nyní už snadno sestrojíme graf dané relace, viz obr. 6.

Na obr. 7 je graf relace, získaný otočením grafu z obr. 6 se středem v počátku o orientovaný úhel $+45°$. Nabízí se otázka, jak zadat relaci, jejíž graf je na obr. 7. Abychom tuto otázku zodpověděli, musíme toto otočení matematicky popsat; přesněji řečeno, máme nalézt transformaci soustavy souřadnic, která je určena otočením se středem v počátku o $+45°$.

Soustava souřadnic Oxy se změní na soustavu souřadnic $Ox'y'$. Podstatné je si uvědomit, že v kartézské soustavě souřadnic $Ox'y'$ bude mít relace, jejíž graf je na obr. 7, vyjádření $|x'| + |y'| = 1$.



Obr. 6



Obr. 7

Nyní už nám zbývá určit vztahy mezi x a x' a mezi y a y'. K tomu využijeme komplexní čísla. Nechť jsou dána dvě komplexní čísla $z = x + y\mathrm{i}$ a $z' = x' + y'\mathrm{i}$, pro která platí $|z| = |z'|$ a jejich průvodiče svírají úhel velikosti φ. Je-li $\varepsilon = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, pak platí $z' = z\varepsilon$ a $|z'| = |z\varepsilon|$. Po dosazení do rovnice $z' = z\varepsilon$ dostaneme

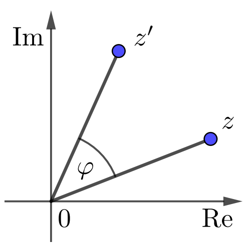
$$x' + y'\mathrm{i} = (x + y\mathrm{i})(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

odkud

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \qquad y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

Po dosazení $\varphi = 45^\circ$ dostáváme

$$x' = x\frac{\sqrt{2}}{2} - y\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad y' = x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Obr. 8

Pro vyjádření relace $|x'|+|y'|=1$ v kartézské soustavě souřadnic Ox,y pak platí

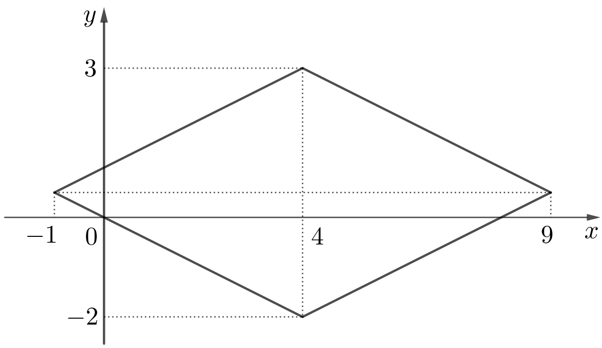
$$\left|x\frac{\sqrt{2}}{2}-y\frac{\sqrt{2}}{2}\right|+\left|x\frac{\sqrt{2}}{2}+y\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=1,$$
$$|x-y|+|x+y|=\sqrt{2}.$$

Příklad 3

Sestrojte graf relace $|x-4|+|2y-1|=5$.

Řešení.

Podle zadání platí po úpravě $|2y-1|=5-|x-4|$, a proto $|x-4|\leq 5$, tj. $x\in\langle -1;9\rangle$. Platí $0\leq|x-4|=5-|2y-1|$, a tedy $|2y-1|\leq 5$, tj. $y\in\langle -2;3\rangle$. Pro $x\in\langle -1;4\rangle$ máme funkce $y=\frac{1}{2}x+1$ a $y=-\frac{1}{2}x$, pro $x\in\langle 4;9\rangle$ máme funkce $y=\frac{1}{2}x-4$, $y=-\frac{1}{2}x+5$ (obr. 9).



Obr. 9

Grafů binárních relací můžeme využít také při řešení soustav rovnic.

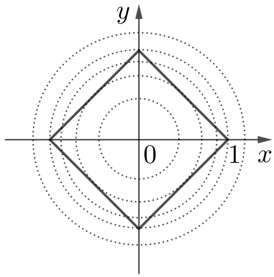
Příklad 4

Řešte graficky soustavu rovnic s kladným reálným parametrem r:

$$|x|+|y|=1,$$
$$x^2+y^2=r^2.$$

Řešení.

Na základě znalosti grafu relace $|x|+|y|=1$ snadno zjistíme, že kružnice $x^2+y^2=r^2$ graf této relace neprotne nebo ho protne ve čtyřech nebo osmi bodech. Pro řešení dané soustavy mohou nastat pouze tři možnosti: žádné řešení, čtyři řešení, osm řešení. Z grafů na obr. 10 lze snadno určit, že daná soustava má 4 řešení v případě, že $r = 1$ nebo $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Soustava nemá řešení pro $r < \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $r > 1$. V případě, že je $r \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$, má úloha 8 řešení.



Obr. 10

Příklad 5

Řešte graficky a početně soustavu rovnic s nezáporným reálným parametrem p:

$$|y| = \sqrt{2x - x^2},$$
$$|y| = px + p.$$

Řešení.

Soustavu lze zapsat ve tvaru $px + p = \sqrt{2x - x^2}$, který vede na kvadratickou rovnici

$$\left(1 + p^2\right) x^2 + 2\left(p^2 - 1\right) x + p^2 = 0. \tag{1}$$

Pro její diskriminant platí $D = 4 - 12p^2$. Zřejmě je $D \geq 0$ pro $|p| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$. Protože je $p \geq 0$, platí $p \in \left\langle 0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle$. Pro $p > \frac{\sqrt{3}}{3}$ soustava nemá řešení. Je-li $p = 0$, dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 - 2x = 0$, která má reálné kořeny $x = 0$, $x = 2$. Po dosazení do rovnice $|y| = px + p$, dostaneme dvě řešení, a to $(0; 0)$, $(2; 0)$. Je-li $p = \frac{\sqrt{3}}{3}$, dostaneme kvadratickou rovnici $4x^2 - 4x + 1 = 0$, která má dvojnásobný kořen $x = \frac{1}{2}$. Pro odpovídající y pak platí $|y| = \frac{\sqrt{3}}{3}$. V tomto případě má soustava dvě řešení: $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Pokud je $p \in \left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, má rovnice (1) dva reálné kořeny:

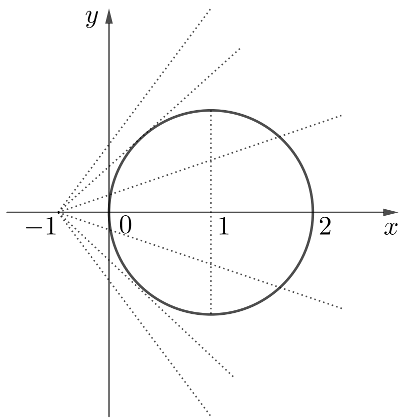
$$x_1 = \frac{1 - p^2 + \sqrt{1 - 3p^2}}{1 + p^2}, \qquad x_2 = \frac{1 - p^2 - \sqrt{1 - 3p^2}}{1 + p^2}.$$

Pro odpovídající hodnoty y platí: $y_1 = px_1+p$, $y_2 = -px_1-p$, $y_3 = px_2+p$, $y_4 = -px_2 - p$. Po dosazení dostáváme:

$$\begin{aligned}
y_1 &= p\left(\frac{1-p^2+\sqrt{1-3p^2}}{1+p^2}\right)+p = \frac{p(2+\sqrt{1-3p^2})}{1+p^2},\\
y_2 &= -p\left(\frac{1-p^2+\sqrt{1-3p^2}}{1+p^2}\right)-p = -\frac{p(2+\sqrt{1-3p^2})}{1+p^2},\\
y_3 &= p\left(\frac{1-p^2-\sqrt{1-3p^2}}{1+p^2}\right)+p = \frac{p(2-\sqrt{1-3p^2})}{1+p^2},\\
y_4 &= -p\left(\frac{1-p^2-\sqrt{1-3p^2}}{1+p^2}\right)-p = -\frac{p(2+\sqrt{1-3p^2})}{1+p^2}.
\end{aligned}$$

Daná soustava má čtyři reálná řešení: (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_3), (x_2, y_4).

Grafem relace $|y| = \sqrt{2x - x^2}$ je kružnice se středem v bodě $S[1; 0]$ a poloměrem $r = 1$. Grafem relace $|y| = px + p$ jsou dvojice polopřímek se společným počátkem v bodě $P[-1; 0]$. Z obr. 11 lze snadno usoudit, že polopřímky kružnici buď neprotnou nebo ji protnou ve dvou nebo ve čtyřech bodech. Z toho plyne, že daná soustava má v závislosti na parametru p buď dvě nebo čtyři řešení nebo nemá řešení.



Obr. 11

Následující úlohy slouží k procvičení dané problematiky.

Úloha 1

V oboru reálných čísel řešte početně i graficky soustavu rovnic s reálným parametrem p:

$$|x| + |y| = 1,$$
$$|y| = \sqrt{x + p}.$$

$\big[|p| > 1$ (nemá řeš.), $p = -1$ (1 řeš.), $p = 1$ (3 řeš.), $p \in \left(-1; \frac{3}{4}\right)$ (2 řeš.), $p = \frac{3}{4}$ (4 řeš.), $p \in \left(\frac{3}{4}; 1\right)$ (6 řeš.)$\big]$.

Úloha 2

V oboru reálných čísel řešte početně i graficky soustavu rovnic s reálným parametrem r:

$$|xy| = 1,$$
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

$\big[r < \sqrt{2}$ (nemá řešení), $r = \sqrt{2}$ (4 řešení), $r > \sqrt{2}$ (8 řešení)$\big]$.

Úloha 3

Sestrojte graf relace $|y| = \dfrac{|x|}{1 + x^2}$.

Úloha 4

V oboru reálných čísel řešte početně a graficky soustavu rovnic:

$$|x + y| = 3,$$
$$|x - y| = 1.$$

$\big[$Existují čtyři řešení: $(1; 2)$, $(2; 1)$, $(-1; -2)$, $(-2; -1)\big]$.

Úloha 5

V oboru reálných čísel řešte početně i graficky soustavu rovnic s reálným parametrem r:

$$|x + y| = 1,$$
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

$\left[r < \frac{\sqrt{2}}{2}\right.$ (nemá řešení), $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (2 řešení), $r > \frac{\sqrt{2}}{2}$ (4 řešení)$\left.\right]$.

Výše uvedený text lze využít při práci se žáky SŠ, kteří mají hlubší zájem o matematiku. Můžeme také připomenout posloupnost pojmů:

množina → *uspořádaná dvojice* → *kartézský součin* →
→ *relace* → *zobrazení* → *funkce.*