Tři speciální body ležící na jedné přímce IV

JAROSLAV ZHOUF

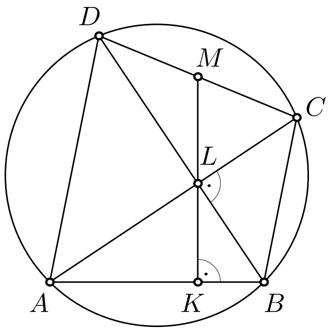
FIT ČVUT, Praha

I v tomto článku budeme pokračovat v prezentaci zajímavých trojic bodů, které leží na jedné přímce. Při důkazech některých předložených tvrzení nám budou opět pomáhat věta Menelaova a věta Cèvova uvedené v [5]. Podobně pomocnou literaturou jsou publikace [1, s. 52–58], [4, s. 28–51]. Příklady prezentované v tomto článku jsou převážně čerpány z publikací [2, s. 51–79], [3, s. 98].

Další trojice bodů ležících na jedné přímce

Příklad 1

Tětivový čtyřúhelník $ABCD$ má navzájem kolmé úhlopříčky AC, BD, jejich průsečík označme L. Je-li K pata kolmice z bodu L na stranu AB a M střed strany CD, pak body K, L, M leží na jedné přímce. Dokažte.



Obr. 1

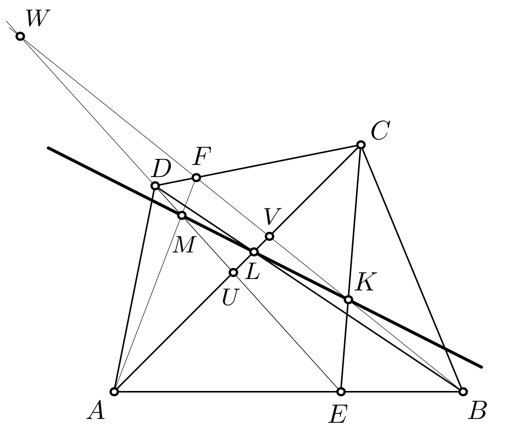
Řešení. Sledujme obr. 1. Úsečka KL je výška pravoúhlého trojúhelníku ABL, proto jsou úhly KLB a BAL shodné. Úhly BAC a BDC jsou obvodové úhly k tětivě BC, takže jsou shodné. Jelikož je bod M středem strany CD a trojúhelník CLD je pravoúhlý, je $|DM| = |LM|$. Trojúhelník DML je tudíž rovnoramenný se shodnými úhly MDL a MLD.

Z těchto úvah vyplývá, že jsou úhly KLB a MLD shodné, takže body K, L, M leží na jedné přímce.

Příklad 2 (jedna z variací Pappovy úlohy)

Ve čtyřúhelníku $ABCD$ jsou uvnitř stran AB, CD zvoleny postupně body E, F. Průsečík přímek EC, BF označme K, průsečík přímek AC, BD označme L a průsečík přímek AF, ED označme M. Dokažte, že body K, L, M leží na jedné přímce.

Řešení. Uvažujme trojúhelník UVW, kde bod U je průsečíkem přímek AC, ED, bod V průsečíkem přímek AC, BF a W průsečíkem přímek ED, BF (obr. 2a).



Obr. 2a

Využijeme pětkrát Menelaovu větu pro trojúhelník UVW a pro přímky BD, EC, AF, CD, AB, tedy

$$\frac{|UD|}{|WD|} \cdot \frac{|WB|}{|VB|} \cdot \frac{|VL|}{|UL|} = 1, \qquad \frac{|UE|}{|WE|} \cdot \frac{|WK|}{|VK|} \cdot \frac{|VC|}{|UC|} = 1,$$

$$\frac{|UM|}{|WM|} \cdot \frac{|WF|}{|VF|} \cdot \frac{|VA|}{|UA|} = 1, \qquad \frac{|WD|}{|UD|} \cdot \frac{|VF|}{|WF|} \cdot \frac{|UC|}{|VC|} = 1,$$

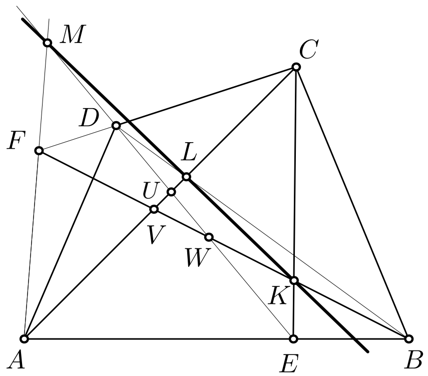
$$\frac{|WE|}{|UE|} \cdot \frac{|VB|}{|WB|} \cdot \frac{|UA|}{|VA|} = 1.$$

Vynásobením všech pěti rovností dostaneme

$$\frac{|UM|}{|WM|} \cdot \frac{|WK|}{|VK|} \cdot \frac{|VL|}{|UL|} = 1,$$

což podle Menelaovy věty znamená, že body K, L, M leží na jedné přímce.

Poznámka. Zde uvedený příklad je jednou z možných poloh zadaných bodů A, B, C, D, E, F. Další možnou polohu těchto bodů ukazuje obr. 2b.



Obr. 2b

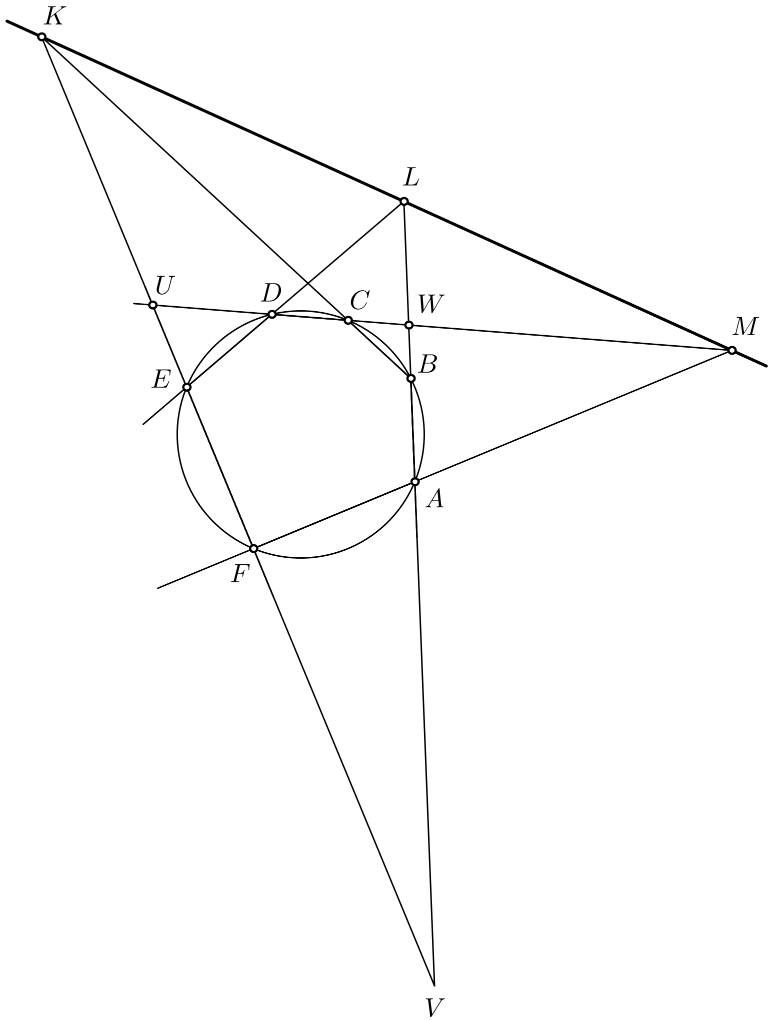
Příklad 3 (Pascalova věta)

Šestiúhelník $ABCDEF$ je vepsaný do kružnice. Přímky, na nichž leží strany BC, EF, se protínají v bodě K, přímky, na nichž leží strany AB, DE, se protínají v bodě L a přímky, na nichž leží strany AF, CD, se protínají v bodě M. Dokažte, že body K, L, M leží na jedné přímce.

Řešení. Označme U průsečík přímek CD, EF, dále V průsečík přímek AB, EF a W průsečík přímek AB, CD (obr. 3). Nyní použijeme třikrát Menelaovu větu pro trojúhelník UVW a postupně pro přímky BC, DE, AF. Vzniknou rovnosti

$$\frac{|VB|}{|WB|} \cdot \frac{|WC|}{|UC|} \cdot \frac{|UK|}{|VK|} = 1, \qquad \frac{|VL|}{|WL|} \cdot \frac{|WD|}{|UD|} \cdot \frac{|UE|}{|VE|} = 1,$$

$$\frac{|VA|}{|WA|} \cdot \frac{|WM|}{|UM|} \cdot \frac{|UF|}{|VF|} = 1.$$



Obr. 3

Tyto tři rovnosti vzájemně vynásobíme a činitele v čitateli i jmenovateli vhodně přeuspořádáme do tvaru, kde budeme moci využít mocnosti bodu ke kružnici. Tedy dostaneme

$$\frac{|UE|\cdot|UF|}{|UC|\cdot|UD|}\cdot\frac{|VA|\cdot|VB|}{|VE|\cdot|VF|}\cdot\frac{|WC|\cdot|WD|}{|WA|\cdot|WB|}\cdot\frac{|VL|}{|WL|}\cdot\frac{|WM|}{|UM|}\cdot\frac{|UK|}{|VK|}=1.$$

První zlomek na levé straně je roven jedné, neboť v jeho čitateli i jmenovateli je dvěma způsoby zapsána mocnost bodu U vzhledem k dané kružnici opsané šestiúhelníku. Stejně tak druhý i třetí zlomek na levé straně jsou rovny jedné. Zbyla nám tedy rovnost

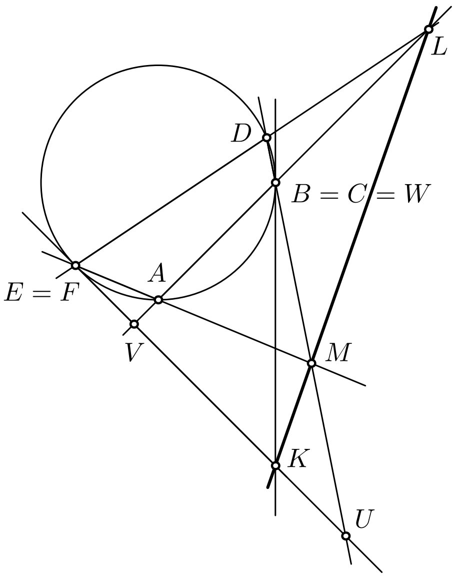
$$\frac{|VL|}{|WL|} \cdot \frac{|WM|}{|UM|} \cdot \frac{|UK|}{|VK|} = 1,$$

která vyjadřuje podle Menelaovy věty pro trojúhelník UVW, že body K, L, M leží na jedné přímce.

Příklad 4 (Pascalova věta zredukovaná na čtyřúhelník)

Čtyřúhelník $ABDE$ je vepsaný do kružnice. Tečny v bodech B a E se protínají v bodě K, přímky AB, DE se protínají v bodě L a přímky AE, BD se protínají v bodě M. Dokažte, že body K, L, M leží na jedné přímce.

Řešení. Uvažujme příklad 3, kde se mluví o šestiúhelníku $ABCDEF$ vepsaném do kružnice. Necháme-li splynout body B, C a body E, F, dostaneme čtyřúhelník $ABDE$. Místo přímky BC vznikne tečna ke kružnici v bodě B a místo přímky EF vznikne tečna v bodě E (obr. 4).

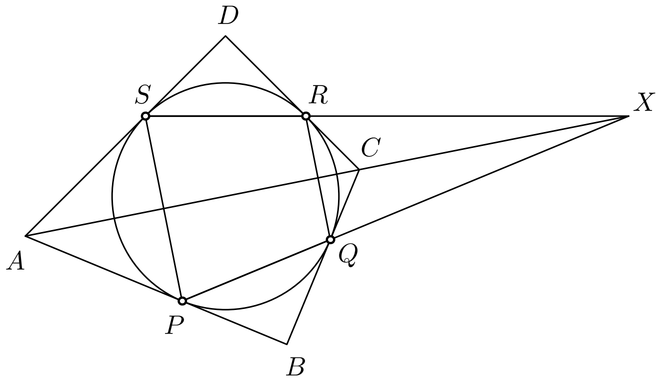


Obr. 4

Analogicky dostaneme body U, V, W a můžeme aplikovat Menelaovu větu pro trojúhelník UVW a příslušné přímky. Poté celý důkaz dokončíme jako v příkladu 3.

Příklad 5

Čtyřúhelníku $ABCD$ je vepsána kružnice, body dotyku stran tohoto čtyřúhelníku s kružnicí tvoří čtyřúhelník $PQRS$ podle obr. 5, pak přímky PQ, RS jsou buď rovnoběžné, nebo se protínají v bodě X. Ve druhém případě leží body A, C, X na jedné přímce. Dokažte.



Obr. 5

Řešení. Budeme se zabývat pouze druhým případem, tedy dokážeme, že body A, C, X leží na jedné přímce. Použijeme nejprve Menelaovu větu pro trojúhelník ABC a přímku PQ. Platí

$$\frac{|AP|}{|BP|} \cdot \frac{|BQ|}{|CQ|} \cdot \frac{|CX|}{|AX|} = 1,$$

odkud za přispění rovnosti $|BP| = |BQ|$ dostaneme

$$\frac{|AX|}{|CX|} = \frac{|AP|}{|CQ|}.$$

Tuto rovnost využijeme v následujících rovnostech. A využije postupně i rovnosti $|DR| = |DS|$, $|AP| = |AS|$, $|CR| = |CQ|$.

Nyní dokážeme, že body S, R, X leží na jedné přímce. Použijeme k tomu rovnosti

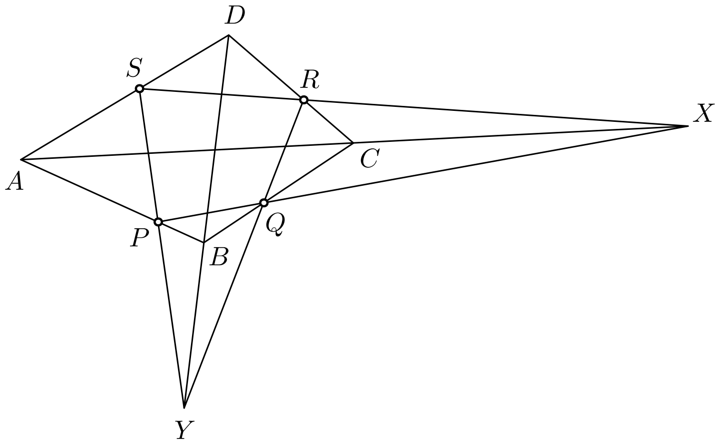
$$\frac{|AX|}{|CX|} \cdot \frac{|CR|}{|DR|} \cdot \frac{|DS|}{|AS|} = \frac{|AP|}{|CQ|} \cdot \frac{|CR|}{|AS|} = \frac{|CR|}{|CQ|} = 1.$$

A to je tvrzení Menelaovy věty pro trojúhelník ACD a přímku SR. Tím je dokázáno, že body S, R, X leží na jedné přímce.

Poznámka. V příkladu 5 analogicky platí, že i průsečík přímek QR a PS leží na jedné přímce společně s body B, D, nebo že jsou přímky QR a PS rovnoběžné. Dokonce platí ještě obecnější tvrzení než v příkladu 5, to si nyní uvedeme.

Příklad 6

Je dán čtyřúhelník $ABCD$, na jeho stranách jsou jsou zvoleny body P, Q, R, S podle obr. 6. Jestliže průsečík X přímek PQ a RS leží společně s body A, C na jedné přímce, leží také průsečík Y přímek QR a PS společně s body B, D na jedné přímce. Dokažte.



Obr. 6

Řešení. Podle Menelaovy věty pro trojúhelník ABC a přímku PQ můžeme psát

$$\frac{|AP|}{|BP|} \cdot \frac{|BQ|}{|CQ|} \cdot \frac{|CX|}{|AX|} = 1,$$

odkud

$$\frac{|CX|}{|AX|} = \frac{|BP|}{|AP|} \cdot \frac{|CQ|}{|BQ|}.$$

Stejně tak podle Menelaovy věty pro trojúhelník ACD a přímku SR můžeme psát

$$\frac{|DR|}{|CR|} \cdot \frac{|AS|}{|DS|} \cdot \frac{|CX|}{|AX|} = 1,$$

odkud

$$\frac{|AX|}{|CX|} = \frac{|DR|}{|CR|} \cdot \frac{|AS|}{|DS|}.$$

Z obou rovností vyplývá rovnost

$$\frac{|AP|}{|BP|} \cdot \frac{|BQ|}{|CQ|} = \frac{|DR|}{|CR|} \cdot \frac{|AS|}{|DS|},$$

a tedy

$$|AP| \cdot |BQ| \cdot |CR| \cdot |DS| = |AS| \cdot |BP| \cdot |CQ| \cdot |DR|.$$

Ještě napišme Menelaovu větu pro trojúhelník ABD a přímku PS

$$\frac{|DS|}{|AS|} \cdot \frac{|AP|}{|BP|} \cdot \frac{|BY|}{|DY|} = 1,$$

odkud

$$\frac{|BY|}{|DY|} = \frac{|AS|}{|DS|} \cdot \frac{|BP|}{|AP|}.$$

Nyní dokážeme, že body Q, R, Y leží na jedné přímce. Použijeme k tomu rovnosti získané výše, takže platí

$$\frac{|CQ|}{|BQ|} \cdot \frac{|DR|}{|CR|} \cdot \frac{|BY|}{|DY|} = \frac{|CQ|}{|BQ|} \cdot \frac{|DR|}{|CR|} \cdot \left(\frac{|AS|}{|DS|} \cdot \frac{|BP|}{|AP|}\right) =$$
$$= \left(\frac{|BP|}{|AP|} \cdot \frac{|CQ|}{|BQ|}\right) \cdot \left(\frac{|DR|}{|CR|} \cdot \frac{|AS|}{|DS|}\right) = \frac{|CX|}{|AX|} \cdot \frac{|AX|}{|CX|} = 1.$$

To je tvrzení Menelaovy věty pro trojúhelník BCD a přímku QR. Tím je dokázáno, že body Q, R, Y leží na jedné přímce.

Úlohy k samostatnému řešení

Úloha 1

Dokažte tvrzení z příkl. 2 pro polohu bodů A, B, C, D, E, F na obr. 2b.

Úloha 2

Je dáno 6 bodů A, B, C, D, K, M takových, že se přímky AM, BK, CD protínají v jednom bodě a přímky AB, CK, DM se protínají v jednom bodě. Dokažte, že se v jednom bodě protínají také přímky AC, BD, KM.

Úloha 3

Dokažte tvrzení z příkladu 3 pro případ, že v šestiúhelníku $ABCDEF$ splynou body B, C a také splynou body D, E, takže vznikne čtyřúhelník $ABDF$.

Úloha 4

Na kružnici se středem S je pět bodů A, B, C, D, E v tomto pořadí. Body jsou umístěny tak, že $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADE| = 45°$. Dokažte, že body E, S, B leží na jedné přímce.

Návody k řešení zadaných úloh

Úloha 1: Postup důkazu je totožný jako v příkladu 2.

Úloha 2: Řešení úlohy lze provést pomocí řešení příkl. 2 s pomocí obr. 2a.

Úloha 3: Důkaz je analogický jako v příkladu 4.

Úloha 4: Obvodový úhel nad tětivou AB má velikost 45°, proto středový úhel nad touto tětivou má velikost 90°. Stejné tvrzení platí pro tětivu AE.

Tento článek opět navázal na ten předchozí. I zde jsme představili několik zajímavých trojic bodů v rovině, které leží na jedné přímce. Další zajímavé trojice bodů představíme v navazujících článcích.

Literatura

[1] *Boček, L., Zhouf, J.*: Planimetrie. 2. rozšířené vydání, PedF UK, Praha, 2012.

[2] *Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L.*: Geometry revisited. The Mathematical Association of America, 1967.

[3] *Honsberger, R.*: Mathematical Chestnuts from Around the World. The Mathematical Association of America, 2001.

[4] *Švrček, J., Vanžura J.*: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha, 1988.

[5] *Zhouf, J.*: Tři speciální body ležící na jedné přímce II. Matematika–fyzika–informatika, roč. 30 (2021), č. 4, s. 261–271.