rozevřete, až se prsty narovnají, a znovu rychle tyč uchopte. Tuto dobu změříte stopkami velmi obtížně. Poměrně přesně dokážete zjistit, kam se posunulo na tyči místo úchopu. Vzdálenost obou míst, v nichž se ukazováček ruky dotýká tyče, označíme d; potom $t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$.

Úkol 7: Určete dobu reakce vašeho úchopu tyče

Pokus proveďte se smetákem, lyžařskou holí či jinou vhodnou tyčí. Úchop může být levou či pravou rukou.

Závěrem

Mohli jste zjistit, že k měření nepotřebujeme složitá zařízení, ale spíše důvtip, logické myšlení a dobré nápady; pak můžeme využít i předměty z našeho okolí. Pro zájemce jsou vytvořené pracovní listy k výše uvedeným úkolům (včetně metodických pokynů a verze pro učitele) k dispozici na webu: http://cental.uhk.cz

L i t e r a t u r a

[1] *Svoboda, E.* a kol.: Přehled středoškolské fyziky. Praha, Prometheus 1996, 2006, 531 s. ISBN 80-7196-307-0/

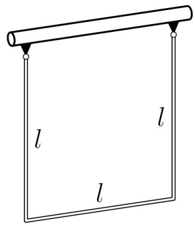
Teoretické úlohy celostátního kola 53. ročníku FO

Ve dnech 22. až 24. února 2012 se v Pardubicích uskutečnilo celostátní kolo 53. ročníku Fyzikální olympiády (viz zprávu v MFI 21 (2012), č. 9, s. 572). V příspěvku uvádíme zadání i řešení teoretických úloh, jejichž autory jsou RNDr. Josef Jírů (úloha 1), PaedDr. Přemysl Šedivý (úloha 2 a 3) a RNDr. Jan Thomas (úloha 4).

Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

1. Elektromagnetická indukce v pravoúhlém rámečku

Pravoúhlý rámeček složený ze tří stejných vodičů délky l je zavěšen na vodorovné nevodivé tyči (obr. 1) v prostoru homogenního magnetického pole s magnetickou indukcí $\boldsymbol{B}$. Rámeček vychýlíme do vodorovné polohy a uvolníme.



Obr. 1

a) Určete maximální úhlovou rychlost pohybu.

b) Určete maximální velikost indukovaného napětí mezi závěsy, má-li magnetická indukce $\boldsymbol{B}$ 1) svislý směr, 2) směr osy otáčení, 3) vodorovný směr kolmý k ose otáčení.

Řešte obecně, všechny číselné koeficienty vyjádřete přesně. Odpor vzduchu považujte za zanedbatelný. Moment setrvačnosti tenké homogenní tyče o hmotnosti m a délce l vzhledem k příčné ose otáčení procházející těžištěm je

$$J_0 = \tfrac{1}{12} m l^2.$$

Řešení:

1. a) Označme m hmotnost celého rámečku, h hloubku těžiště, kterou budeme měřit od osy otáčení. Potom platí

$$mgh = 2 \cdot \frac{m}{3} g \frac{l}{2} + \frac{m}{3} g l,$$

z čehož

$$h = \frac{2}{3} l.$$

Dále určíme moment setrvačnosti celého rámečku vzhledem k ose otáčení jako součet momentů setrvačnosti jednotlivých částí. K výpočtu těchto dílčích momentů použijeme Steinerovu větu. Pro moment setrvačnosti jedné svislé části rámečku vzhledem k ose procházející závěsem platí

$$J_1 = \frac{1}{12} \cdot \frac{m}{3} l^2 + \frac{m}{3} \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{9} m l^2.$$

Pro moment setrvačnosti vodorovné části rámečku vzhledem k ose procházející závěsem platí

$$J_2 = \frac{m}{3} l^2.$$

Celkový moment setrvačnosti je pak

$$J = 2J_1 + J_2 = \frac{5}{9} ml^2.$$

Ze ZZME plyne

$$mgh = \frac{1}{2} J\omega^2,$$

z čehož

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{12g}{5l}}.$$

b1) Podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce se mezi konci přímého vodiče délky l, který se pohybuje příčně rychlostí $\boldsymbol{v}$ v magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$, indukuje napětí o velikosti

$$U_{\mathrm{i}} = Blv \sin\alpha,$$

kde α je odchylka vektorových přímek vektorů $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{v}$. Bez ohledu na orientaci indukce nahoru či dolů bude na středním vodiči maximální velikost napětí při průchodu nejnižší polohou, kde je $\sin\alpha = 1$ a současně i velikost rychlosti maximální:

$$v_{\max} = l\omega_{\max} = \sqrt{\frac{12}{5} gl}.$$

Po dosazení dostaneme

$$U_{\mathrm{i}\max} = Blv_{\max} = B\sqrt{\frac{12}{5} gl^3}.$$

Závěsné vodiče se pohybují v rovinách rovnoběžných s vektorem magnetické indukce, napětí se na nich neindukuje.

b2) Na závěsných vodičích má indukované napětí navzájem opačnou polaritu, na zbývajícím vodorovném vodiči je napětí nulové. Proto je $U_{\mathrm{i}} = 0$.

b3) Označme α opět okamžitou odchylku vektorových přímek vektorů $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{v}$. Ve výchozí vodorovné poloze rámečku je velikost rychlosti nulová, ve svislé poloze rámečku je $\sin\alpha = 0$, tedy v těchto polohách je indukované napětí nulové. Maximální velikost napětí budeme hledat mezi těmito polohami. Rámeček má během pohybu těžiště v hloubce

$$h_\alpha = \frac{2}{3} l \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{3} l \cos\alpha.$$

V této poloze je velikost rychlosti středního vodiče

$$v = l\omega = \sqrt{\frac{12}{5} gl \cos\alpha}$$

a velikost indukovaného napětí mezi jeho konci

$$U_\mathrm{i} = Blv\sin\alpha = B\sqrt{\frac{12}{5} gl^3} \cdot \sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}.$$

Závěsné vodiče indukční čáry neprotínají, napětí se na nich neindukuje.

Maximum funkce najdeme pomocí derivace podle proměnné α:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}) = \cos\alpha\sqrt{\cos\alpha} + \sin\alpha\frac{-\sin\alpha}{2\sqrt{\cos\alpha}} = \frac{2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sqrt{\cos\alpha}}.$$

Z podmínky nulové derivace dostaneme

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} \qquad (\alpha = 54{,}7^\circ).$$

Ze vztahů mezi goniometrickými funkcemi dále odvodíme

$$\sin^2\alpha = \frac{2}{3}, \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \sin\alpha\sqrt{\cos\alpha} = \sqrt[4]{\frac{4}{27}} = 0{,}620.$$

Maximální velikost indukovaného napětí je

$$U_\mathrm{imax} = B\sqrt{\frac{12}{5} gl^3} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{27}} = \sqrt[4]{\frac{64}{75}} \cdot B\sqrt{gl^3}.$$

2. Kondenzátor a rezistor

Kondenzátorem připojeným ke zdroji střídavého harmonického napětí procházel proud I_1 (obr. 2a). Jestliže byl tentýž kondenzátor připojen sériově s rezistorem, procházel obvodem proud I_2 (obr. 2b).

a) Porovnejte rezistanci R rezistoru s kapacitancí X_C kondenzátoru.

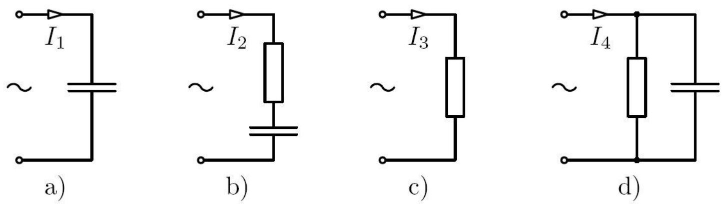
b) Jaké bylo fázové posunutí svorkového napětí oproti proudu I_2?

c) Jaký proud I_3 by procházel obvodem, kdybychom ke zdroji připojili samotný rezistor (obr. 2c)?

d) Jaký celkový proud I_4 by procházel obvodem, kdybychom kondenzátor a rezistor připojili paralelně (obr. 2d)?

e) Jaké by bylo fázové posunutí svorkového napětí oproti proudu I_4?

Vnitřní odpor zdroje je zanedbatelný, ve všech případech je tedy jeho svorkové napětí stejné. Řešte obecně, pak pro hodnoty $I_1 = 50$ mA, $I_2 = 40$ mA.



Obr. 2

Řešení:

2.a) V obvodu se samotným kondenzátorem platí $I_1 = U/X_C$. Z fázorového diagramu sériového spojení kondenzátoru s rezistorem na obr. R1 plyne

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = \sqrt{(RI_2)^2 + (X_C I_2)^2} = I_2\sqrt{R^2 + X_C^2}.$$

Platí tedy

$$\frac{I_1^2}{I_2^2} = \frac{R^2 + X_C^2}{X_C^2} \quad \Rightarrow \quad R^2 = X_C^2\left(\frac{I_1^2}{I_2^2} - 1\right),$$

$$R = X_C\sqrt{\frac{I_1^2}{I_2^2} - 1} = 0{,}75X_C.$$

b) Fázové posunutí svorkového napětí oproti proudu I_2 určíme rovněž z obr. R1. Platí

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{U_C}{U_R} = -\frac{X_C}{R} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{I_1^2}{I_2^2}-1}} = -\frac{I_2}{\sqrt{I_1^2 - I_2^2}} = -\frac{4}{3}, \quad \varphi_2 = -53^\circ.$$

Proud I_2 tedy předbíhá před svorkovým napětím fázově o 53°.

c) Samotným rezistorem bude procházet proud

$$I_3 = \frac{U}{R} = \frac{X_C I_1}{X_C\sqrt{\frac{I_1^2}{I_2^2}-1}} = \frac{I_1 I_2}{\sqrt{I_1^2 - I_2^2}} = 67\ \text{mA}.$$

d) Z fázorového diagramu paralelního zapojení kondenzátoru s rezistorem na obr. R2 odvodíme

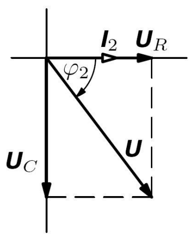
$$I_4 = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{\frac{U^2}{R^2} + \frac{U^2}{X_C^2}} = \frac{U\sqrt{X_C^2+R^2}}{RX_C} =$$

$$= \frac{X_C I_1 \cdot X_C\sqrt{1+\frac{I_1^2}{I_2^2}-1}}{X_C^2\sqrt{\frac{I_1^2}{I_2^2}-1}} = \frac{I_1^2}{\sqrt{I_1^2-I_2^2}} = 83\ \text{mA}.$$

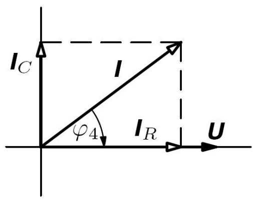
e) Fázové posunutí svorkového napětí oproti proudu I_4 určíme z obr. R2. Platí

$$\operatorname{tg}\varphi_4 = -\frac{I_C}{I_R} = -\frac{I_1}{I_3} = -\frac{\sqrt{I_1^2 - I_2^2}}{I_2} = -0{,}75, \qquad \varphi_4 = -37^\circ.$$

Proud I_4 tedy předbíhá před svorkovým napětím fázově o 37°.



Obr. R1



Obr. R2

3. Vibrátor mobilního telefonu

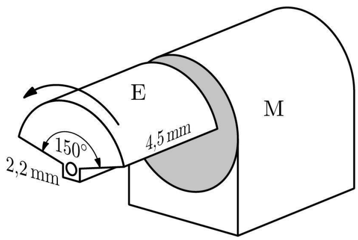
Vibrátor mobilního telefonu (obr. 3) je tvořen miniaturním motorkem M, na jehož ose je nasazen excentr E ve tvaru válcové výseče o poloměru $r = 2{,}2$ mm, výšce $h = 4{,}5$ mm a středovém úhlu $2\alpha = 150°$ vyrobený z kovu o hustotě $\varrho = 8\,300\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Motorek se otáčí s frekvencí $f = 130$ Hz. Těžiště válcové výseče se nachází ve vzdálenosti

$$d = \frac{2r\sin\alpha}{3\alpha} \tag{1}$$

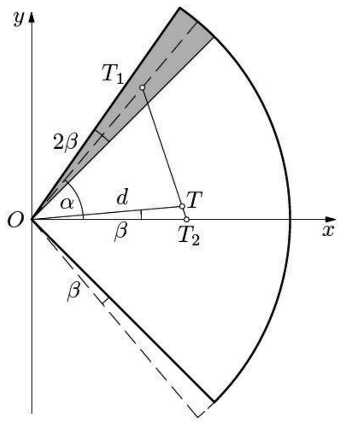
od osy motorku.

a) Odvoďte vzorec (1). Můžete k tomu využít obr. 4, kde je válcová výseč otočena o malý úhel β ze základní polohy symetrické podle osy x. V pootočené poloze je y-ová souřadnice těžiště $y_T = d\sin\beta$. Těleso si přitom můžeme představit rozdělené na válcovou výseč s malým středovým úhlem 2β a těžištěm T_1 ve vzdálenosti $2r/3$ od osy a na válcovou výseč se středovým úhlem $2\alpha - 2\beta$ a těžištěm T_2 na ose x.

b) Určete velikost odstředivé síly působící na rotující excentr.



Obr. 3



Obr. 4

Řešení:

3. a) Označme m hmotnost celého tělesa a m_1 hmotnost výseče se středovým úhlem 2β. Platí

$$y_T = \frac{m_1 \cdot \frac{2r}{3}\sin\alpha + (m - m_1)\cdot 0}{m} = $$

$$= \frac{2r\sin\alpha}{3}\cdot\frac{m_1}{m} = \frac{2r\sin\alpha}{3}\cdot\frac{2\beta}{2\alpha} = d\sin\beta \approx d\cdot\beta.$$

Z toho $d = \frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$.

b) Úlohu budeme řešit ve vztažné soustavě spojené s rotujícím excentrem. Počátek zvolíme na ose motorku, osa x prochází těžištěm (obr. R3). Na náhodně zvolený element působí odstředivá síla $\boldsymbol{F}_i = m_i\omega^2\boldsymbol{r}_i$. Výsledná odstředivá síla je

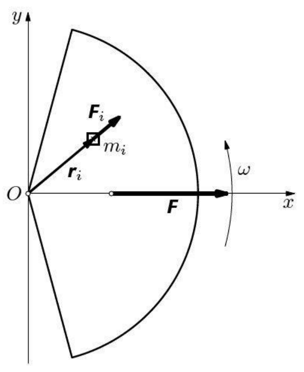
$$\boldsymbol{F} = \sum m_i\omega^2\boldsymbol{r}_i = \omega^2\sum m_i\boldsymbol{r}_i = \omega^2 m\boldsymbol{r}_T,$$

kde m je celková hmotnost excentru a $\boldsymbol{r}_T$ je polohový vektor těžiště. Vzhledem k souměrnosti excentru působí výsledná odstředivá síla $\boldsymbol{F}$ v ose x a má velikost

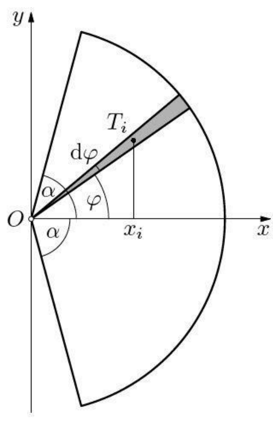
$$F = \omega^2 m x_T = \omega^2 m d.$$

Hmotnost excentru je $m = \alpha r^2 h\varrho$ a velikost výsledné odstředivé síly je

$$F = 4\pi^2 f^2 \cdot \frac{2}{3}h\varrho r^3\sin\alpha = 0{,}17\ \text{N}.$$



Obr. R3



Obr. R4

Alternativní řešení úkolu a) užitím integrálního počtu:

Válcovou výseč umístěnou v základní poloze rozdělíme na elementární válcové výseče s malým středovým úhlem dφ (obr. R4). Těžiště T_i elementární výseče má x-ovou souřadnici

$$x_i = \frac{2}{3} r \cos \varphi,$$

hmotnost elementární výseče je

$$\mathrm{d}m = m \frac{\mathrm{d}\varphi}{2\alpha}.$$

Pro x-ovou souřadnici těžiště celého tělesa platí

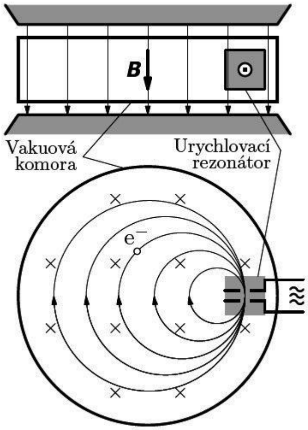
$$x_T = \frac{1}{m} \int\limits_m x \cdot \mathrm{d}m = \frac{1}{m} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3} r \cos \varphi \cdot \frac{m}{2\alpha} \mathrm{d}\varphi = \frac{r}{3\alpha} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi \, \mathrm{d}\varphi = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}.$$

4. Mikrotron

Mikrotron je urychlovač elektronů pracující na podobném principu jako cyklotron. V poli silného elektromagnetu o indukci $\boldsymbol{B}$ je umístěna plochá válcová komora, ale místo duantů je u okraje komory dutinový rezonátor, který opakovaně urychluje elektrony vysokofrekvenčním střídavým napětím. Při prvním vstupu do rezonátoru je kinetická energie elektronu zanedbatelná. Při každém průchodu rezonátorem se jeho kinetická energie zvětší o hodnotu rovnou klidové energii $E_0 = m_0 c^2$ a elektron přechází na kruhovou trajektorii o větším poloměru (obr. 5). Aby elektron přišel mezi elektrody rezonátoru ve správné fázi periody vysokofrekvenčního napětí a mohl být znovu urychlen, pracuje generátor napětí s frekvencí

$$f_0 = \frac{eB}{2\pi m_0}, \tag{2}$$

kde $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg je klidová hmotnost elektronu, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C elementární náboj a $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ m $\cdot$ s^{-1} rychlost světla ve vakuu.



Obr. 5

a) Vypočítejte frekvenci generátoru, jestliže velikost vektoru magnetické indukce ve vakuové komoře je $B =$ $= 0{,}40$ T.

b) Ověřte, že při splnění podmínky (2) je na každé trajektorii elektronu doba oběhu T celočíselným násobkem periody T_0 generátoru.

c) Určete celkovou energii elektronu, poloměr trajektorie a dobu oběhu po n-tém průchodu elektronu rezonátorem. Můžete využít vztah mezi celkovou energií, klidovou energií a hybností částice $E^2 = E_0^2 + p^2c^2$.

Řešte nejprve obecně, potom pro $B = 0{,}40$ T, $n = 40$.

Řešení:

4. a) $f_0 = 1{,}1 \cdot 10^{10}$ Hz.

b) Při n-tém průchodu rezonátorem se kinetická energie elektronu zvětší na

$$E_\mathrm{k} = nE_0 = n \cdot m_0c^2$$

a hmotnost elektronu se zvětší na

$$m = m_0 + \frac{E_\mathrm{k}}{c^2} = (n+1)m_0.$$

Dostředivou silou při pohybu elektronu je síla magnetická. Platí

$$Bev = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{Ber}{m} = \frac{Ber}{(n+1)m_0} = 2\pi rf. \qquad (3)$$

$$f = \frac{Be}{2\pi(n+1)m_0} = \frac{f_0}{n+1} \quad \Rightarrow \quad T = (n+1)T_0.$$

c) Po n-tém průchodu rezonátorem je celková energie elektronu

$$E = (n+1)m_0c^2.$$

Pro $n = 40$ dostaneme $E = 3{,}4 \cdot 10^{-12}$ J $= 21$ MeV.

Doba n-tého oběhu je $T = \frac{n+1}{f_0} = \frac{2\pi(n+1)m_0}{Be}$.

Pro dané hodnoty $T = 3{,}7 \cdot 10^{-9}$ s.

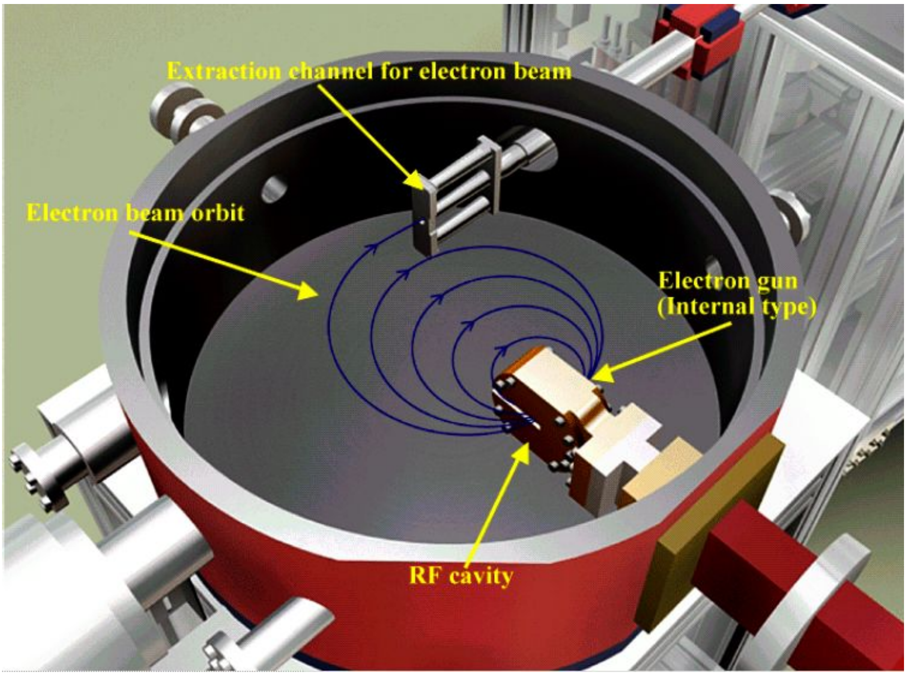
Z (1) vyjádříme hybnost elektronu $p = mv = Ber$.

Ze vztahu mezi celkovou energií, klidovou energií a hybností částice po n-tém oběhu platí:

$$E^2 = [(n+1)E_0]^2 = E_0^2 + p^2c^2 = E_0^2 + (Berc)^2,$$

$$r = \frac{E_0}{Bec}\sqrt{(n+1)^2 - 1} = \frac{m_0 c}{Be}\sqrt{n^2 + 2n}.$$

Pro dané hodnoty $r = 17$ cm.



Obrázek převzat z publikace *Urychlovače nabitých částic* od doc. Z. Doležala z MFF.