

# O konstrukci $n$ -tých odmocnin kladných reálných čísel

LUDEK SPÍCHAL

Česká lesnická akademie, Trutnov

Ačkoliv v názvu článku není parabola zmíněna, bude to právě tato kuželosečka (popř. její zobecněná podoba), která nás jako pověstná červená nit bude provázet napříč celým textem. Připomeňme nejprve, že *regulární* (vlastní) *kuželosečky* jsou rovinné křivky vznikající průnikem kuželové plochy a roviny, která neprochází jejím vrcholem.

V článku se omezíme pouze na hyperbolu a parabolu, se nimiž se žáci středních škol seznamují jak v souvislosti s pojmem grafu funkce (lineárně lomené, resp. kvadratické), tak v oblasti analytické geometrie. Přestože jde v obou zmíněných oblastech matematiky o stejné druhy křivek, odlišný způsob zavedení (explicitně určené předpisy funkcí vs. rovnice kuželoseček v analytické geometrii) může znesnadnit vytvoření komplexního pohledu na kuželosečky, a to nezávisle na konkrétním způsobu jejich určení.

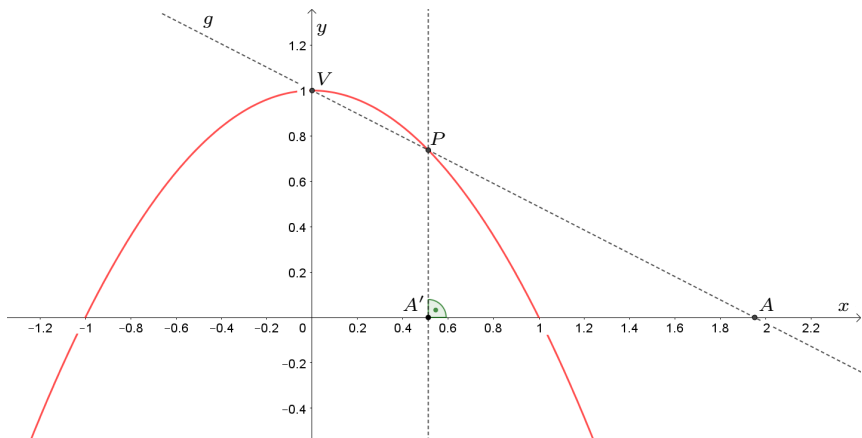
V článku si klademe za cíl ukázat na příkladu řešení konkrétního problému, kterým je konstrukce  $n$ -té odmocniny reálného čísla, kombinací obou přístupů. Výchozí kuželosečkou bude křivka určená rovnicí

$$y = 1 - x^2, \quad (1)$$

kterou budeme nazývat *jednotkovou parabolou* (obr. 1).

**Příklad 1.** Ukažme, že pomocí jednotkové paraboly je možné konstruovat převrácenou hodnotu reálného čísla  $a \neq 0$ , tj. nalézt hodnotu čísla  $\frac{1}{a}$  (viz [1]).

*Řešení.* Při konstrukci převrácené hodnoty reálného čísla  $|a| > 1$  (obr. 1) sestrojíme kolmici k ose  $x$  z průsečíku  $P$  jednotkové paraboly s přímkou  $g$  procházející vrcholem  $V[0, 1]$  paraboly a bodem  $A[a, 0]$ . Kolmice protíná osu  $x$  v bodě bod  $A'$ , jehož  $x$ -ová souřadnice je, jak vzápětí ukážeme, převrácenou hodnotou čísla  $a$ , tj.  $\frac{1}{a}$ . Pro nenulové  $|a| < 1$  bychom při konstrukci postupovali naopak, tj. od bodu  $A'$  k bodu  $A$ .



Obr. 1 Konstrukce převrácené hodnoty reálného čísla pomocí jednotkové paraboly

Přímka  $g$  určená body  $V[0, 1]$  a  $A[a, 0]$  má rovnici

$$g: y = 1 - \frac{x}{a}. \quad (2)$$

Souřadnici  $x$  průsečíku  $P$  získáme řešením rovnice

$$1 - x^2 = 1 - \frac{x}{a},$$

která má zřejmě jediný nenulový kořen

$$x = \frac{1}{a}.$$

V článku se budeme dále opírat o množinu křivek, které získáme zobecněním rovnice paraboly (1) ve tvaru

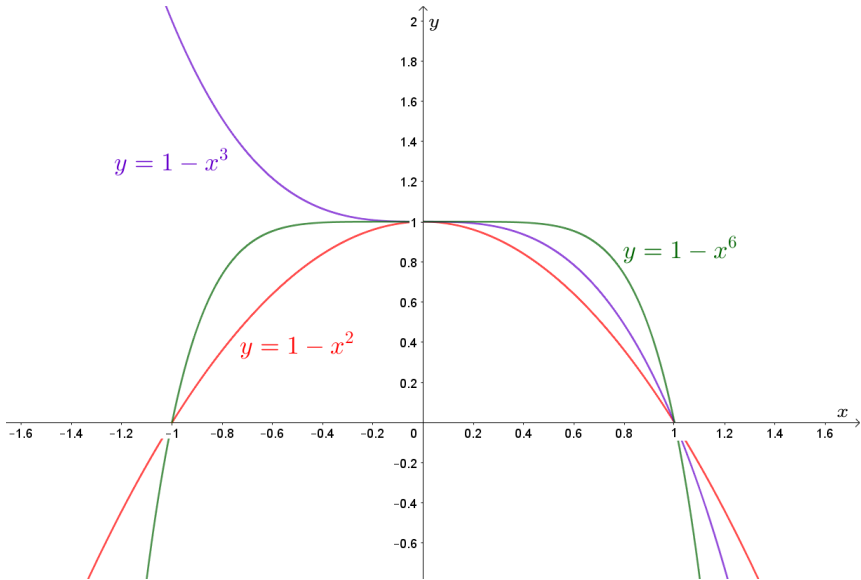
$$y = 1 - x^n, \quad (3)$$

kde  $n \in \mathbb{N}$ . Pro potřeby článku pro tuto třídu grafů *mocninných funkcí* zavedeme pojem *zobecněné jednotkové paraboly* (obr. 2), jednotková parabola pak bude speciálním případem rovnice (3) pro  $n = 2$ . Pro volbu  $n = 1$  je zobecněná jednotková parabola totožná s přímkou  $y = 1 - x$ , která

představuje osu souměrnosti mezi zobecněnými jednotkovými parabolami určenými rovnicemi (3) a křivkami určenými rovnicemi

$$y = 1 - \sqrt[n]{x}, \tag{4}$$

kteří budeme nazývat *převrácené zobecněné jednotkové paraboly* (obr. 3).

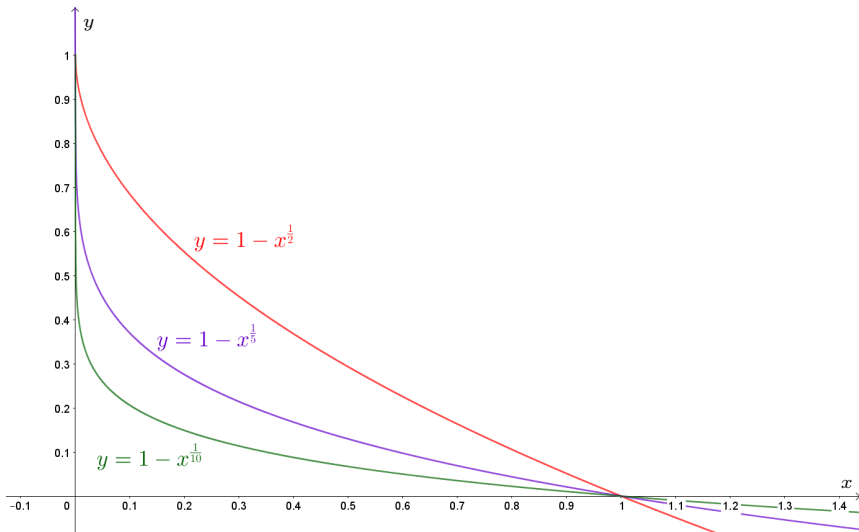


Obr. 2 Zobecněné jednotkové paraboly pro  $n = 2$ ,  $n = 3$  a  $n = 6$

Cílem článku je ukázat, že výše zmíněnou konstrukci převrácené hodnoty reálného čísla  $a$  lze dále užitím křivek (3), resp. (4) rozšířit

- 1) na konstrukci  $n$ -té odmocniny z kladného reálného čísla  $a$ , tj. nalezení čísla  $\sqrt[n]{a}$ ,  $a > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,
- 2) na konstrukci  $(n - 1)$ -ní odmocniny z kladného reálného čísla  $a^n$ , tj. nalezení čísla  $\sqrt[n-1]{a^n}$ ,  $a > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,

Tento cíl splníme v sekcích 2 a 3. Sekci 1 věnujeme některým jiným historicky zajímavým konstrukcím.



Obr. 3 Převrácené zobecněné jednotkové paraboly pro  $n = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{5}$  a  $\frac{1}{10}$

## 1. Vybrané konstrukce druhé a třetí odmocniny

Připomeneme nyní několik vybraných geometrických konstrukcí druhé a třetí odmocniny. Dvě známé konstrukce druhé odmocniny (Eukleidova věta o výšce, Theodorova spirála) doplníme o dvě méně známé konstrukce třetí odmocniny (Nikomedova a Descartova) [2, 3].

### 1.1. Eukleidova věta o výšce

Podle Eukleidovy <sup>1)</sup> věty o výšce pro obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníku platí, že je roven obsahu obdélníku sestrojeného z obou úseků přepony. V případě, že délky úseků na přeponě jsou 1 a dané číslo  $a$ , má výška pravoúhlého trojúhelníku délku  $\sqrt{a}$  (obr. 4).

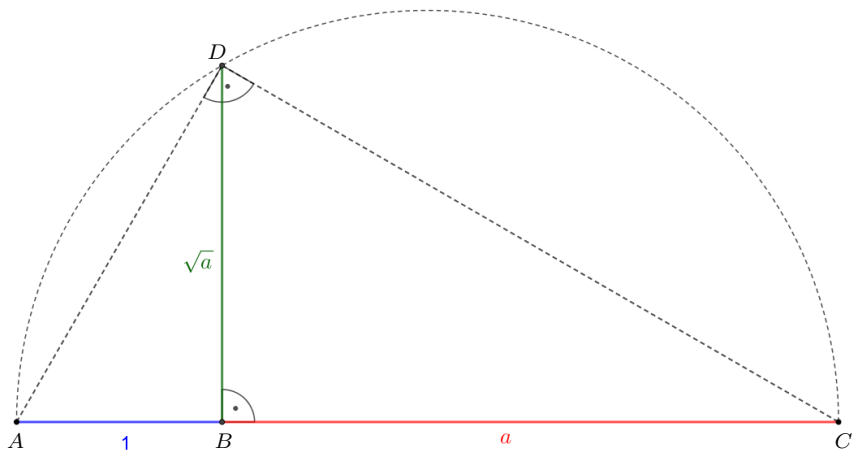
### 1.2. Theodorova spirála

Theodorovu <sup>2)</sup> spirálu tvoří posloupnost pravoúhlých trojúhelníků, když první z nich je současně rovnoramenný s odvěsnami o délce 1. Jednou z odvěsen každého „následujícího“ trojúhelníku je vždy přepona trojúhelníku

<sup>1)</sup>Eukleidés (asi 325 př. n. l.–asi 260 př. n. l.) byl řecký matematik a geometr.

<sup>2)</sup>Theodóros z Kyrény (asi 340 př. n. l.–270 př. n. l.) byl řecký filosof a matematik.

„předcházejícího“, druhá odvěsna má délku 1 (obr. 5). Délky jednotlivých přepon pravoúhlých trojúhelníků tvoří posloupnost druhých odmocnin ze všech přirozených čísel  $a \geq 2$ .



Obr. 4 Konstrukce druhé odmocniny pomocí Eukleidovy věty o výšce

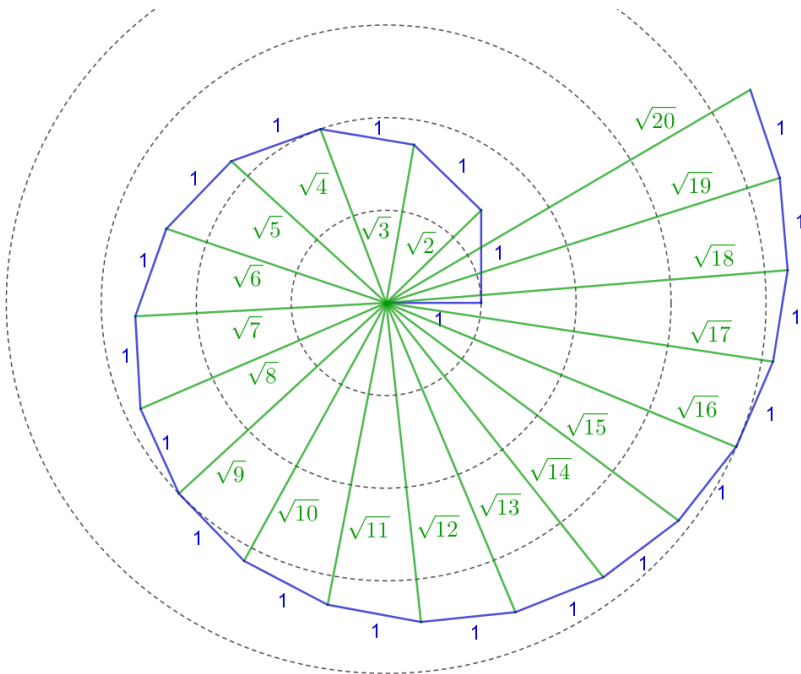
### 1.3. Nikomedova konstrukce třetí odmocniny

Nikomedova<sup>3)</sup> konstrukce čísla  $\sqrt[3]{a}$  v případě  $0 < a < 4$  využívá rovno-ramenný trojúhelník  $ABC$ , který má ramena délky 1 a základnu délky  $\frac{a}{4}$  (obr. 6). Nechť dále  $B$  je středem úsečky  $CD$  a  $E$  je průsečík polopřímky  $DA$  s přímkou procházející bodem  $C$ , která je rovnoběžná s úsečkou  $AB$ . Bod  $S$  leží na polopřímce  $BA$  a  $R$  je průsečík úseček  $DE$  a  $CS$ . Jestliže  $|RS| = 1$ , pak  $|AS| = \sqrt[3]{a}$ .

Zdůrazněme, že úsečku  $RS$  nelze sestrojít eukleidovsky, tj. užitím kružítka a pravítka. Při důkazu konstrukce si povšimněme, že  $\triangle ABD \sim \triangle ECD$ . Úsečka  $CE$  má délku  $\frac{a}{2}$ , neboť bod  $B$  je středem úsečky  $CD$  a úsečka  $AB$  je střední příčkou trojúhelníku  $ECD$ , tj.  $|CE| = 2|AB| = \frac{a}{2}$ . Dále platí, že  $\triangle ECR \sim \triangle ASR$  a

$$\frac{\frac{a}{2}}{|CR|} = \frac{|AS|}{1}.$$

<sup>3)</sup>Nikomedes (asi 280 př. n. l.–210 př. n. l.) byl řecký matematik.



Obr. 5 Theodorova spirála

Podle Pythagorovy věty platí pro pravoúhlý trojúhelník  $SCM$

$$(1 + |CR|)^2 = |CM|^2 + (|AM| + |AS|)^2.$$

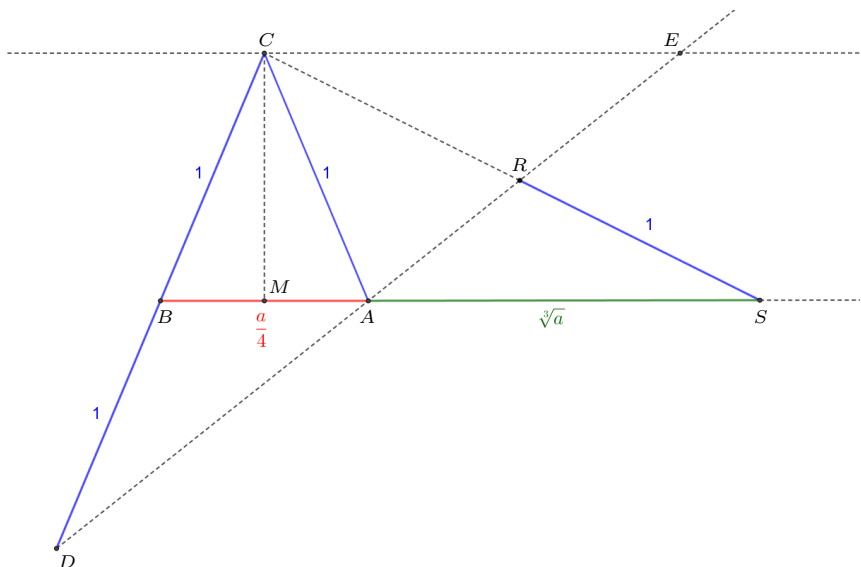
Pokud označíme  $x = |AS|$  a dosadíme za  $|CR| = \frac{a}{2x}$ ,  $|CM| = \sqrt{1 - \frac{a^2}{64}}$ ,  $|AM| = \frac{a}{8}$ , pak po zjednodušení dostáváme rovnici

$$4x^4 + ax^3 - 4ax - a^2 = 0.$$

Přestože je předchozí rovnice 4. stupně, můžeme ji vyřešit z rozkladu

$$(x^3 - a)(4x + a) = 0,$$

podle kterého má rovnice právě dva reálné kořeny  $x_1 = -\frac{a}{4}$ ,  $x_2 = \sqrt[3]{a}$ .



Obr. 6 Nikomedova konstrukce třetí odmocniny

#### 1.4. Descartesova konstrukce třetí odmocniny

Descartesova <sup>4)</sup> konstrukce čísla  $\sqrt[3]{a}$  pro dané reálné číslo  $a > 0$  využívá kružnici se středem  $S\left[\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad (5)$$

soustavy  $Oxy$  (obr. 7). Ukažme, že pak  $\sqrt[3]{a}$  je  $x$ -ovou souřadnicí průsečíku  $P \neq O$  této kružnice a paraboly s rovnicí

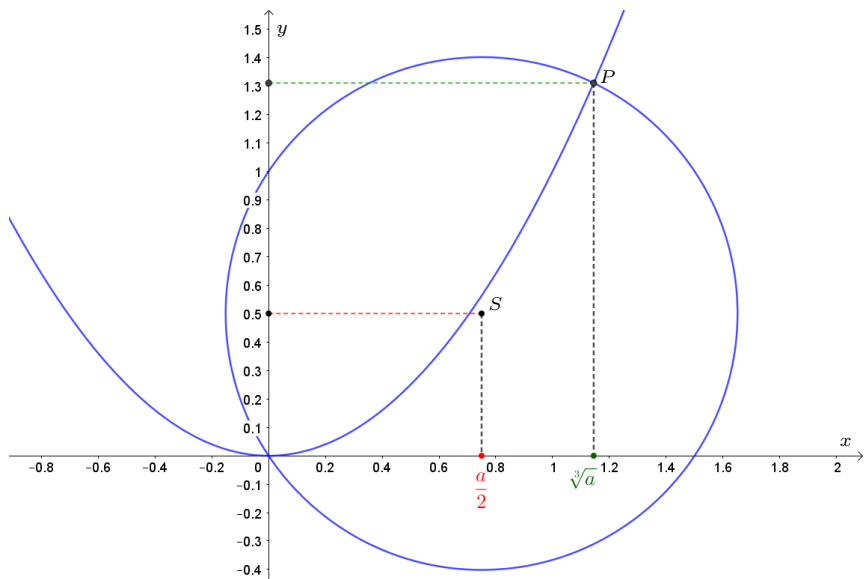
$$y = x^2. \quad (6)$$

Úpravou rovnice (5) a následným dosazením z rovnice (6) totiž dostaneme rovnici

$$x^4 - ax = 0 \quad \text{neboli} \quad x(x^3 - a) = 0, \quad (7)$$

takže reálnými kořeny rovnice (7) jsou právě čísla  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \sqrt[3]{a}$ .

<sup>4)</sup>René Descartes (1596–1650) byl francouzský filosof, matematik a fyzik.



Obr. 7 Descartesova konstrukce třetí odmocniny

## 2. Konstrukce $n$ -té odmocniny kladného reálného čísla $a$

Jednoduchá varianta konstrukce  $n$ -té odmocniny daného kladného reálného čísla  $a$  spočívá v určení průsečíku přímky s rovnicí  $y = 1 - a$  a zobecněné jednotkové paraboly s rovnicí  $y = 1 - x^n$ . Je zřejmé, že hledanou  $n$ -tou odmocninou je  $x$ -ová souřadnice nalezeného průsečíku.

Uvedená konstrukce předpokládá použití zobecněných jednotkových parabol na intervalu  $\langle 0; \infty \rangle$ . Předpokládejme nyní, že budeme uvažovat zobecněné jednotkové paraboly zobrazené na uzavřeném intervalu  $\langle 0; 1 \rangle$ , kde předvedeme konstrukci  $n$ -té odmocniny pro dané číslo  $a > 1$  (obr. 8). Polopřímka  $g$  zapsaná rovnicí (2) protíná zobecněné jednotkové paraboly určené rovnicemi (3) v bodech, jejichž  $x$ -ové souřadnice určíme vyřešením rovnice

$$1 - x^n = -\frac{1}{a}x + 1. \quad (8)$$

Po úpravě dostáváme rovnici

$$x \left( x^{n-1} - \frac{1}{a} \right) = 0$$

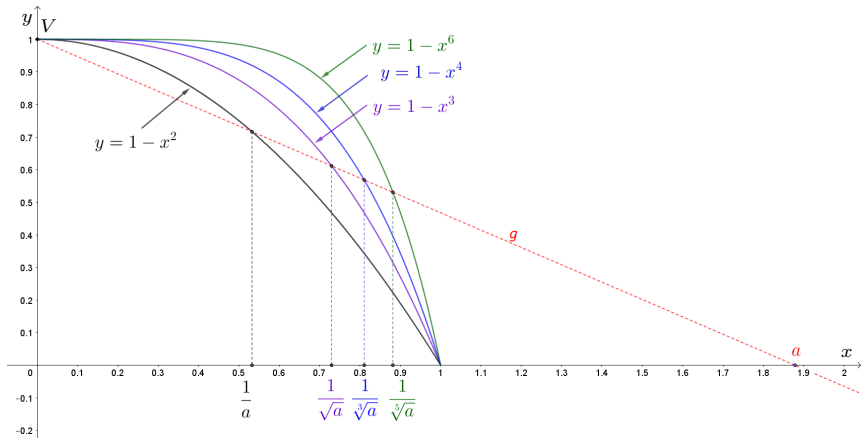


s nezápornými kořeny

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt[n-1]{a}}.$$

Průsečíky polopřímky  $g$  a zobecněných jednotkových parabol jsou tedy body

$$V[0, 1], \quad P\left[\frac{1}{\sqrt[n-1]{a}}, 1 - \frac{1}{\sqrt[n-1]{a^n}}\right].$$

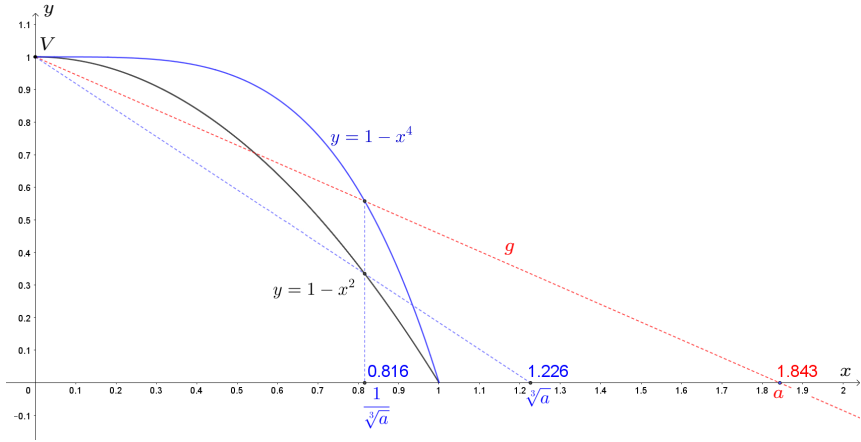


Obr. 8 Konstrukce převrácené hodnoty  $n$ -tých odmocnin reálného čísla  $a > 1$  pomocí zobecněných jednotkových parabol

Výše provedený výpočet a konstrukce znázorněná na obr. 8 ukazují, že zobecněná jednotková parabola  $n$ -tého stupně umožňuje provést geometrickou konstrukci převrácené hodnoty  $(n - 1)$ -ní odmocniny z kladného reálného čísla  $a$ , tj. hodnoty  $\frac{1}{\sqrt[n-1]{a}}$ . Zbylá část postupu spočívající v nalezení převrácené hodnoty k číslu  $\frac{1}{\sqrt[n-1]{a}}$  odpovídá řešení příkladu 1. Při konstrukci  $n$ -té odmocniny reálného čísla  $a$  bychom tedy použili zobecněnou jednotkovou parabolou stupně  $n + 1$ . Na obr. 9 je tak znázorněna celá konstrukce třetí odmocniny čísla  $a > 1$  pomocí zobecněné jednotkové paraboly stupně 4.

**Úloha 1.** Určete postup konstrukce  $n$ -té odmocniny daného reálného čísla  $a \in (0; 1)$  pomocí zobecněné jednotkové paraboly řádu  $n + 1$ .

**Úloha 2.** Uvažujme bod  $A[a, 0]$ , kde  $a \in (0; 1)$ . Kolmice vztyčená v bodě  $A$  protne zobecněnou jednotkovou parabolou určenou rovnicemi (3) v bodě  $P$ . Přímka  $g = \overleftrightarrow{PV}$ , kde  $V[0, 1]$  je vrchol zobecněné jednotkové paraboly, protne osu  $x$  v bodě  $B[b, 0]$ . Určete vzájemný vztah mezi čísly  $a, b$ .  
(Řešení:  $b = \frac{1}{a^{n-1}}$ )



Obr. 9 Konstrukce třetí odmocniny čísla  $a > 1$  pomocí jednotkové paraboly a zobecněné jednotkové paraboly stupně 4

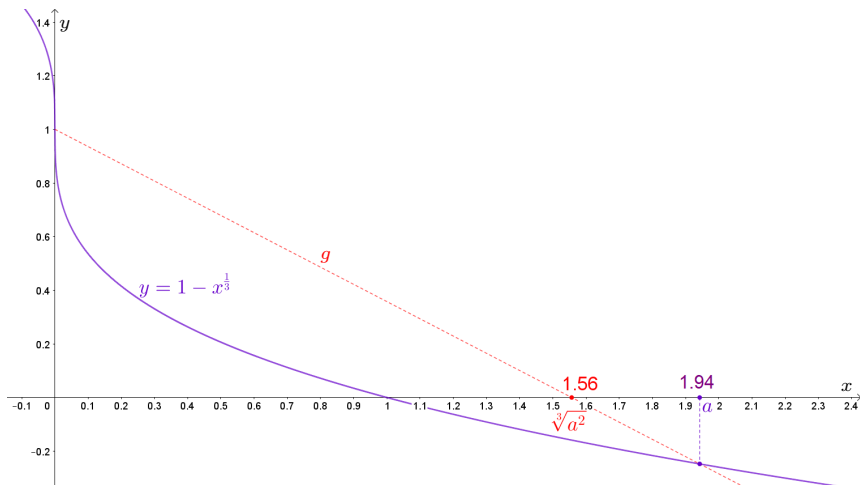
### 3. Konstrukce odmocnin pomocí převrácených zobecněných jednotkových parabol

Zmíníme se ještě stručně o konstrukcích, které využívají grafy převrácených zobecněných jednotkových parabol zavedených rovnicemi (4).

**Příklad 2.** Ukažme konstrukci  $n$ -té odmocniny kladného reálného čísla  $a^{n-1}$ , tj.  $\sqrt[n]{a^{n-1}}$  pomocí převrácené jednotkové paraboly daného stupně  $n$ .

*Nástin řešení.* Kolmice vztyčená v bodě  $A[a, 0]$  protne křivku určenou rovnicí (4) v bodě  $P[a, 1 - \sqrt[n]{a}]$ . Přímka  $g = PV$ , kde  $V[0, 1]$ , určená rovnicí  $g: \sqrt[n]{ax} + ay - a = 0$  protne osu  $x$  v bodě  $A'[\sqrt[n]{a^{n-1}}, 0]$ .

**Úloha 3.** Nechť přímka  $g = AV$ , kde  $A[a, 0]$  a  $V[0, 1]$ , protne graf převrácené zobecněné jednotkové paraboly určené rovnicí (4) v bodě  $P$ . Ukažte, že  $x$ -ová souřadnice bodu  $P$  je rovna číslu  $\sqrt[n]{a^{n-1}}$  (viz obr. 10 pro  $n = 3$ ).



Obr. 10 Konstrukce třetí odmocniny reálného čísla  $a^2$  v případě  $a > 1$  pomocí převrácené zobecněné jednotkové paraboly stupně 3

## Závěr

Možnost využití zobecněných jednotkových parabol při grafickém určování odmocnin reálných čísel vyplývá ze skutečnosti, že odmocňování lze považovat za částečně inverzní operaci k umocňování. Slovo částečně je v tomto případě zásadní, neboť definiční obory těchto dvou funkcí nejsou obecně vždy shodné (např. odmocniny sudého stupně záporných čísel v oboru reálných čísel neexistují).

**Poděkování.** Autor děkuje touto cestou recenzentovi za cenné rady a podněty při úpravě a vylepšení obsahu tohoto článku.

## Literatura

- [1] Spíchal, L.: Jednotková parabola, zlatý řez a parabolické  $\pi$ . *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 96 (2021), č. 1, s. 8–17.
- [2] Nikomedova konstrukce třetí odmocniny. Dostupné na: <https://demonstrations.wolfram.com/NicomedessGeometricConstructionOfPrincipalCubeRoot/>
- [3] Descartesova konstrukce třetí odmocniny. Dostupné na: <https://demonstrations.wolfram.com/DescartessMethodOfEvaluatingThePrincipalCubeRoot/>