Konstrukce bez pouček

ŠÁRKA GERGELITSOVÁ – TOMÁŠ HOLAN

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Jedním z typů úloh, které v geometrii řešíme, jsou konstrukční úlohy. Ve škole to jsou zejména úlohy řešené pravítkem a kružítkem, tedy úlohy planimetrické, eukleidovské. S pomocí didaktického softwaru můžeme ale řešit i úlohy prostorové. Jednu takovou sadu úloh v článku ukážeme.

Konstrukční úlohy v prostoru

Konstrukční trojrozměrné úlohy v učebnicích stereometrie nebývají, přestože by mohly studenty zaujmout a přispět k jejich motivaci. Některé konstrukční úlohy můžeme díky znalosti zobrazovacích metod řešit při deskriptivní geometrii pomocí pravítka a kružítka. Okruh studentů schopných tyto úlohy vyřešit ale můžeme snadno rozšířit tím, že k řešení využijeme vhodný didaktický software. Konstrukce (a obrázky) v tomto textu jsou vytvořené v GeoGebře.

1. Jeden typ konstrukce mnohostěnů

Zadání: *Sestrojte pravidelný mnohostěn o daném počtu stěn, je-li dána jeho hlavní tělesová úhlopříčka (tj. úhlopříčka, která spojuje dvojici protilehlých vrcholů tělesa).*

Poznámka. V pravidelném čtyřstěnu tělesová úhlopříčka neexistuje. Proto v tomto případě upravíme formulaci zadání a budeme hledat pravidelný čtyřstěn $ABCD$ daný průměrem jemu opsané kulové plochy, který prochází daným vrcholem A hledaného mnohostěnu.

Tělesovou úhlopříčkou (či průměrem opsané kulové plochy procházejícím vrcholem) bude hledaný mnohostěn určen jednoznačně až na otočení kolem dané přímky. Úlohu budeme považovat za vyřešenou po sestrojení libovolné stěny požadovaného pravidelného n-úhelníku, protože další vrcholy sestrojíme na opsané kulové ploše pomocí shodnosti trojúhelníků.

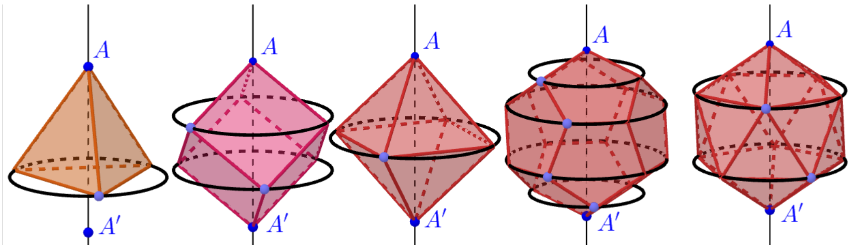
Řešení zobrazíme v trojrozměrném náhledu. Za konstrukční kroky budeme považovat takové trojrozměrné konstrukce zvoleného softwaru, které

jsou obdobou rovinných rýsovacích nástrojů:
- sestrojení kolmice a rovnoběžky v rovině,
- sestrojení kolmé a rovnoběžné roviny,
- sestrojení kulové plochy s daným středem a procházející daným bodem.

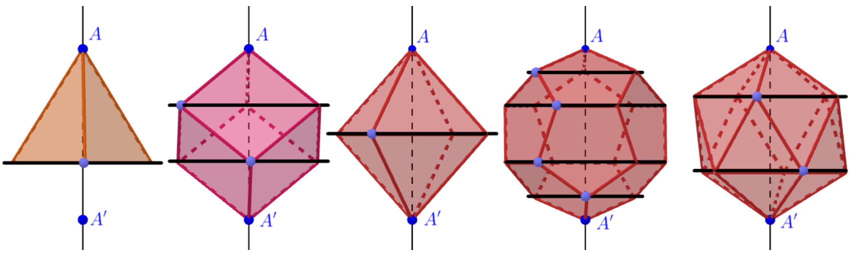
Kromě těchto nástrojů použijeme pro přehlednost celé konstrukce (jako jeden krok) i přímý nástroj, který má GeoGebra mezi základními příkazy: konstrukci pravidelného trojúhelníku, čtverce či pětiúhelníku v rovině. To proto, abychom zabránili přeplnění trojrozměrné scény eukleidovskými postupy.

Ukážeme, že s výše uvedenými nástroji již k vyřešení úlohy nepotřebujeme žádné pokročilé znalosti z trojrozměrné geometrie, postačí všimnout si těch správných vztahů.

Podívejme se na danou úlohu ve všech pěti případech.



Obr. 1 Pětice pravidelných mnohostěnů s vyznačenými kružnicemi, na nichž leží vrcholy tělesa



Obr. 2 Pohled kolmo na zadanou přímku AA'

Nelze si nevšimnout, že zbývající vrcholy mnohostěnu (kromě daných bodů A, A') leží symetricky na kružnicích v rovinách kolmých k dané přímce. Pokud dokážeme určit, v jakém poměru dělí roviny kružnic danou úsečku AA', bude úloha vyřešena: Sestrojíme jednu kružnici, na ní zvolíme vrchol mnohostěnu a sestrojíme patřičný n-úhelník jedné stěny.

Úlohu postupně vyřešíme pro jednotlivé mnohostěny. Začneme nejsnazší úlohou.

1.1. Pravidelný osmistěn

Zbývající 4 vrcholy pravidelného osmistěnu leží ve vrcholech čtverce na kružnici, která je průsečnicí opsané kulové plochy a roviny souměrnosti úsečky AA'. Tím jsme získali všechny vrcholy tělesa.

1.2. Pravidelný čtyřstěn

K vyřešení úlohy pomůže uvědomit si, že střed opsané kulové plochy je těžištěm pravidelného čtyřstěnu. Bude jistě užitečné zamyslet se nad zobecněním pojmu těžiště od trojúhelníku v rovině ke čtyřstěnu v prostoru. Můžeme předem vyzkoumat (nebo odhadnout) jeho polohu: leží ve čtvrtině těžnice.

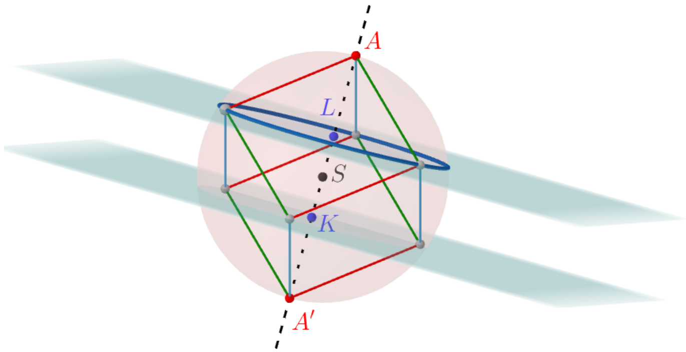
Tento poznatek stačí k vyřešení úlohy: Zbývající vrcholy pravidelného čtyřstěnu leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku. Výška na tuto stěnu splývá v pravidelném čtyřstěnu s těžnicí, která prochází těžištěm tělesa (a tedy i opsané kulové plochy) i těžištěm stěny. Průměr AA' kulové plochy je proto bodem $S = T$ a patou výšky na stěnu BCD dělen v poměru 3 : 1 : 2. Rovina hledané stěny dělí úsečku AA' v poměru 2 : 1.

1.3. Krychle

Zbývajících šest vrcholů krychle tvoří vrcholy dvou rovnostranných trojúhelníků v rovinách kolmých k dané tělesové úhlopříčce. Určíme, v jakém poměru dělí tyto roviny danou úhlopříčku.

Víme, že každá hrana krychle patří do jednoho ze tří směrů. Všechny hrany krychle svírají s tělesovou úhlopříčkou stejný úhel, jejich kolmý průmět na úhlopříčku je tedy shodný, a tudíž rovina, v níž leží vrcholy hran vycházejících z daného vrcholu A, je kolmá k dané úhlopříčce AA' a dělí ji na třetiny.

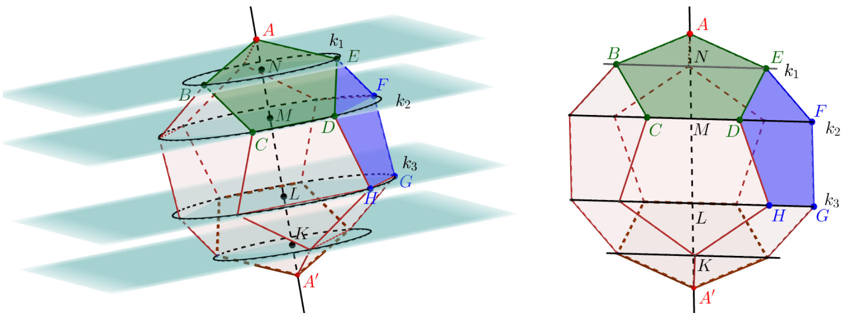
Zvolíme libovolný vrchol na kružnici, která je průsečnicí této roviny s opsanou kulovou plochou a v rovině sestrojíme rovnostranný trojúhelník. Zbylé tři vrcholy jsou středově souměrné s právě sestrojenými vrcholy podle středu krychle (opsané kulové plochy).



Obr. 3 Roviny vedené vrcholy krychle dělí tělesovou úhlopříčku na třetiny

1.4. Pravidelný dvanáctistěn

Žádný z postupů, který jsme viděli v předešlých konstrukcích, tentokrát nemůžeme použít. Hrany pravidelného dvanáctistěnu svírají s danou úhlopříčkou zjevně různé úhly a ve čtyřech po dvou souměrných rovinách kolmých k dané úhlopříčce leží jednak trojice, jednak šestice dalších vrcholů tělesa. Návod k řešení dávají stěny tělesa – pravidelné pětiúhelníky.

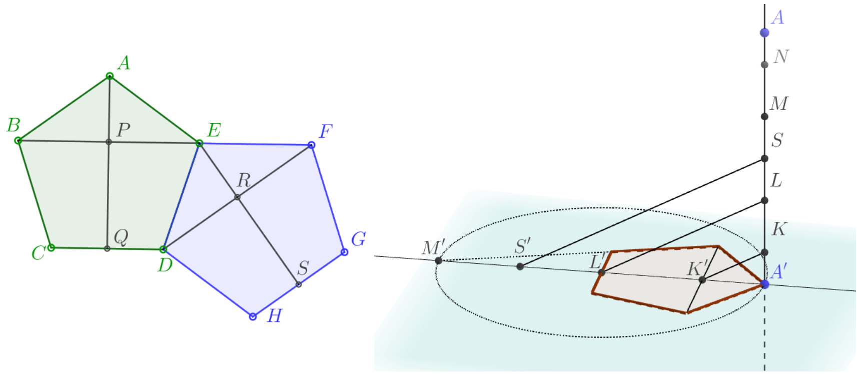


Obr. 4 Dva pohledy na sousední pětiúhelníkové stěny pravidelného dvanáctistěnu

Poměry, v nichž dělí zmíněné roviny danou tělesovou úhlopříčku, jsou určeny poměry vzdáleností v jednotlivých pětiúhelnících stěn:

Poměr 1: Poměr vzdálenosti úhlopříčky BE od vrcholu A a vzdálenosti strany CD od vrcholu A v pětiúhelníku $ABCDE$ (tj. $|AP| : |AQ|$ na obr. 5) je shodný s poměrem průmětů těchto vzdáleností na úhlopříčku AA', tedy s poměrem vzdáleností příslušných kolmých rovin od vrcholu A.

Poměr 2: Podobně poměr vzdálenosti úhlopříčky DF od vrcholu E a vzdálenosti strany HG od vrcholu E v pětiúhelníku $EFGHD$ (tj. $|ER| : |ES|$ na obr. 5) je shodný s poměrem průmětů těchto vzdáleností na úhlopříčku AA', tedy s poměrem vzdálenosti rovin kružnic k_1, k_2 (obr. 4) ku vzdálenosti rovin kružnic k_1, k_3.



Obr. 5 Poměry délek v pětiúhelnících a konstrukce bodů na přímce AA' využitím podobnosti

Oba poměry jsou analogické poměry vzdáleností v pravidelném pětiúhelníku, jsou si tedy rovny. Při značení podle obr. 4 tedy také platí: $|AN| : |NM| = |NM| : |ML|$.

Poměr $|AP| : |PQ|$ vzdáleností v pravidelném pětiúhelníku (obr. 5) je známý poměr zlatého řezu. Pokud s ním nejsme obeznámeni (což by bylo jistě škoda), pro další postup konstrukce to nevadí, postupné poměry sestrojíme pomocí pravidelného pětiúhelníku (pro jehož konstrukci má GeoGebra přímý nástroj) opakovaně, byť zbytečně krkolomně. Z vlastnosti zlatého řezu ale víme, že $|AP| : |PQ| = |PQ| : |AQ|$ a konstrukci rychle dokončíme. Danou úhlopříčku rozdělíme v určeném poměru pomocí podobnosti. Díky souměrnosti podle jejího středu S stačí sestrojit body K, L. Na obr. 5 jsme ve vhodné rovině (zde v rovině kolmé k AA') procházející daným bodem A' sestrojili pomocí konstrukcí v pravidelném pětiúhelníku body K', L', M', pro které platí $|A'K'| : |K'L'| = |K'L'| : |A'L'| = |K'L'| : |L'M'|$. Podobností, v níž středu S' úsečky $L'M'$ odpovídá střed S tělesa, jsme pak sestrojili body K, L. Dále sestrojíme bodem K

rovinu kolmou k AA', kružnici, která je její průsečnicí s opsanou kulovou plochou, a na ní zvolíme vrchol dvanáctistěnu.

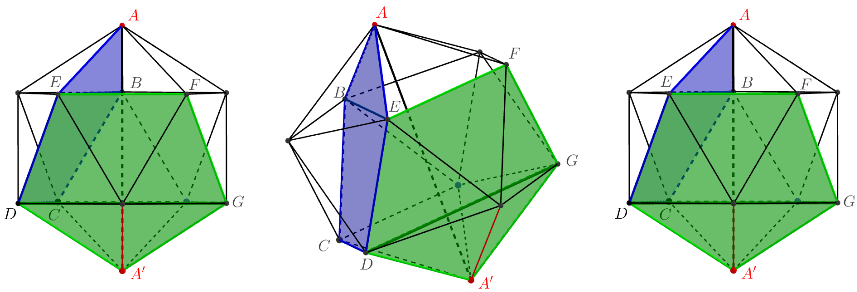
Vidíme, že z rovnosti uvedených poměrů vzdáleností v pětiúhelnících stěn a z vlastnosti zlatého řezu plyne $|KL| : |A'L| = |KL| : |LM|$, tedy $|A'L| = |LM|$. Symetricky dle středu S také $|LM| = |MA|$. Proto body L, M – a tedy roviny, na nichž leží šestice vrcholů tělesa – dělí tělesovou úhlopříčku AA' na třetiny.

Pro další postup konstrukce vrcholu tělesa se nabízí několik nástrojů: přímá konstrukce pětiúhelníku v určené rovině či postupné sestrojování dalších vrcholů tělesa jednak otáčením již sestrojených vrcholů, jednak vynášením délek (pomocí kulových ploch nebo kružnic v rovinách stěn tělesa).

1.5. Pravidelný dvacetistěn

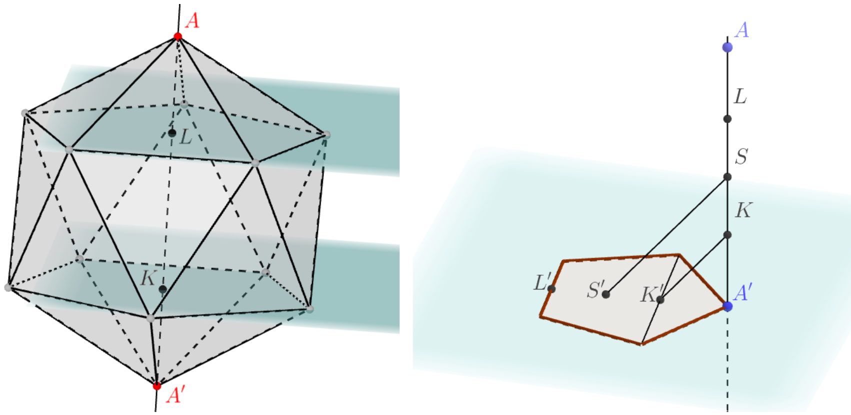
Stěny pravidelného dvacetistěnu jsou rovnostranné trojúhelníky. Zdá se tedy, že opět žádný z dříve použitých postupů nedává návod, jak těleso sestrojit. Zbývající vrcholy tělesa leží symetricky ve dvou rovinách kolmých k úhlopříčce, jejich vzdálenosti ale neznáme a trojúhelníky stěn leží mezi těmito rovinami.

Po chvíli pozorování však i zde najdeme pravidelné pětiúhelníky. Nejsou to stěny, ale řezy tělesa rovinami vedenými jeho vrcholy tak, že odřezávají jeden vrchol. Na obr. 6 vidíme dva takové navazující pětiúhelníky $ABCDE$ a $A'DEFG$. Díky nim odvodíme, že poměry, v nichž kolmé roviny vedené vrcholy dělí danou úhlopříčku (průsečíky K, L na obr. 7), opět vycházejí z poměru zlatého řezu mezi vzdálenostmi v pravidelném pětiúhelníku. Ze shodnosti pětiúhelníků $ABCDE$, $A'DEFG$ plyne $|A'K| : |KL| = |KL| : |A'L| = |AL| : |KL|$.



Obr. 6 Tři pohledy na sousedící pětiúhelníkové řezy v pravidelném dvacetistěnu

Při konstrukci opět můžeme využít toho, že střed dané úhlopříčky je středem hledané úsečky KL a podobností sestrojit pouze bod K (obr. 7). Vzhledem k výše uvedené konstrukci vrcholů pravidelného dvanáctiúhelníku tedy považujme další postup konstrukce za zřejmý.



Obr. 7 Poloha průsečíků K, L s rovinami vrcholů a konstrukce bodu K

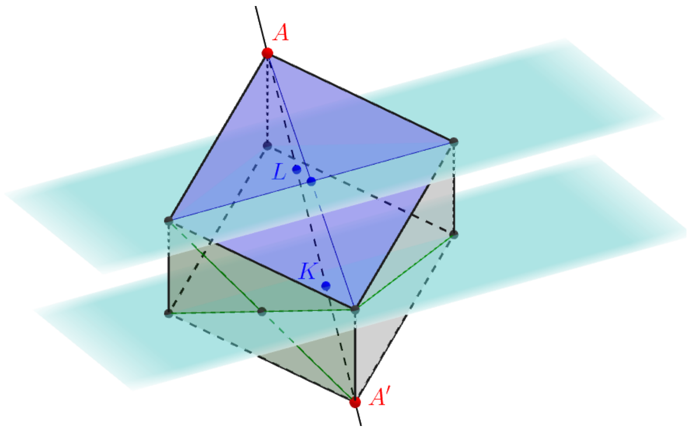
1.6. Poznámka ke krychli

Konstrukci krychle můžeme odůvodnit také pomocí souvisejících stěn: Každá z rovin procházejících dalšími vrcholy kolmo k dané úhlopříčce půlí čtverce tří stěn se společným vrcholem (obr. 8). Mezi rovinami pak leží zbývající poloviny všech šesti stěn krychle. Roviny tedy protínají tělesovou úhlopříčku v jedné třetině.

2. Závěr – radost z objevování

2.1. Jedna dávná úloha

Věříme, že odbočka od obvyklých stereometrických témat ke konstrukční úloze může být pro studenty osvěžením a pomůže upevnit představu o prostorových vztazích. Nejde jistě o nové úlohy, takové úlohy řešili středoškoláci už za Rakousko-Uherska a dnes by s jejich řešením nejspíš měli potíže. Po vyřešení úlohy s krychlí studenti ale jistě (a snad i rychle) vyřeší úlohu, kterou do [1] poslal pan učitel František Jirsák z Dobřenic (zadání jsme přeformulovali do současné češtiny, originální znění najde čtenář v [1]):



Obr. 8 Roviny vedené vrcholy půlí stěny krychle

Do krychle vepíšeme dvě tělesa:

a) kolmý válec, jehož osa splývá s tělesovou úhlopříčkou krychle a jehož kruhové hrany podstav se dotýkají každá tří stěn krychle v jejich středech;

b) dvojkužel, jenž má vrcholy v krajních bodech tělesové úhlopříčky a jehož kruhová podstavná hrana se dotýká všech šesti hran krychle. Určete poměr objemu válce a dvojkužele.

[Řešení je ve 3. čísle téhož ročníku [2].]

2.2. Dvanáctistěn a krychle – další vztahy

Při konstrukci krychle i pravidelného dvanáctistěnu jsme zjistili, že roviny obsahující další vrcholy tělesa dělí danou tělesovou úhlopříčku na třetiny.

Dokážete „vepsat“ krychli do pravidelného dvanáctistěnu?

A těžší úloha: Zkuste „opsat“ dané krychli pravidelný dvanáctistěn se společnou opsanou kulovou plochou.

2.3. Další konstrukční úlohy

V systému GeoTest [4] je připraveno asi 100 prostorových konstrukčních úloh různé obtížnosti, které mohou studenti řešit samostatně, bez podpory učitele, protože systém automaticky vyhodnotí správnost provedeného řešení. Společné řešení a objevování prostorových vztahů ve škole při hodině ale asi bude pro studenty zajímavější a bude je k řešení více motivovat. Zejména, pokud jde o úlohy, k jejichž vyřešení stačí jen pozorovat a všímat si užitečných vztahů.

Literatura

[1] Úlohy. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, sv. 33 (1904), č. 1, s. 114–116. Dostupné z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/123658

[2] Úlohy. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, sv. 33 (1904), č. 3, s. 338–368. Dostupné z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/123974

[3] *Gergelitsová, Š., Holan, T.*: Trable a radosti s geometrií ve škole (Plenary Talk). Proceedings of the Czech-Slovak Conference on Geometry and Graphics 2020, 7.–10. 9. 2020, Pardubice. Slovak University of Technology, Bratislava, s. 17–24.

[4] GeoTest [online] Dostupné z: https://geotest.geometry.cz

O jisté netriviální množině bodů v rovině

LENKA JUKLOVÁ – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Cílem tohoto příspěvku je zkoumání jedné netriviální množiny bodů v rovině, kterou je množina těžišť všech rovnostranných trojúhelníků vepsaných do daného čtverce tak, že všechny tři vrcholy každého z těchto rovnostranných trojúhelníků leží na hranici daného čtverce.

Podnět k řešení uvedeného problému vzešel z praktické ukázky *T. Chehlarové* z Bulharské akademie věd, která prezentovala výsledky projektu „Integrace manipulativních digitálních prostředků do výuky matematiky“ na workshopu Innovative Mathematics Learning Software for Migrant Students, kterou pořádala v říjnu 2019 Univerzita Konstantína Filozofa v Nitře, viz [1].

Snadno je vidět, že pro fixovanou polohu bodu K na hranici daného čtverce $ABCD$ sestrojíme zbývající dva vrcholy K, L hledaného rovnostranného trojúhelníku KLM užitím otočení $\mathcal{R}(K, +60°)$, v němž obrazem vrcholu L je bod M ($M \neq K$), který získáme jako průsečík hranice obrazu