Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 30. 6. 2023 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 283

Určete nejmenší přirozené číslo n, které dává současně při dělení třemi zbytek 2, při dělení čtyřmi zbytek 3, při dělení pěti zbytek 4 a při dělení číslem 2023 zbytek 1. *Jaroslav Švrček*

Úloha 284

Jsou dány dva různé body A, B a přímka p rovnoběžná s úsečkou AB. Na přímce p najděte všechny body C, pro které je hodnota součinu $|AC| \cdot |BC|$ co nejmenší. *Pavel Calábek*

Dále uvádíme řešení úloh 279 a 280, jejichž zadání jsme zveřejnili ve třetím čísle loňského (32.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 279

Dokažte, že pro všechna reálná čísla $a \geq 1$, $b \geq 2$, $c \geq 1$, $d \geq 2$ platí nerovnost

$$4\sqrt{a^2-1} + 2\sqrt{b^2-4} + 4\sqrt{c^2-1} + 2\sqrt{d^2-4} \leq (a+c)(b+d)$$

a určete, pro které hodnoty přirozených čísel a^2, b^2, c^2, d^2 nastane rovnost.

Jaroslav Zhouf

Řešení. Nejprve dokážeme nerovnost

$$2\sqrt{a^2-1} + \sqrt{b^2-4} \leq ab. \tag{1}$$

Obě strany této nerovnosti jsou nezáporná čísla, tato nerovnost je tak ekvivalentní nerovnosti mezi jejich druhými mocninami

$$4(a^2-1) + 4\sqrt{(a^2-1)(b^2-4)} + b^2 - 4 \leq a^2b^2,$$

neboli po úpravě

$$4\sqrt{(a^2-1)(b^2-4)} \leq (a^2-1)(b^2-4) + 4.$$

Odtud snadno vidíme, že tato nerovnost je ekvivalentní s platnou nerovností

$$0 \le \left(\sqrt{(a^2-1)(b^2-4)} - 2\right)^2,$$

přičemž rovnost nastane, právě když

$$(a^2-1)(b^2-4) = 4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 = 4 \cdot 1, \tag{2}$$

kde vpravo jsou všechny rozklady čísla 4 na součin dvou přirozených čísel. Pro přirozená čísla $a^2 \ge 1$, $b^2 \ge 4$ tak rovnost nastane, právě když

$$(a^2, b^2) \in \{(2,8), (3,6), (5,5)\}. \tag{3}$$

Podobným způsobem jako nerovnost (1) dokážeme i nerovnosti

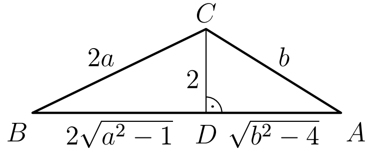
$$\sqrt{b^2-4} + 2\sqrt{c^2-1} \le bc,$$
$$2\sqrt{c^2-1} + \sqrt{d^2-4} \le cd,$$
$$\sqrt{d^2-4} + 2\sqrt{c^2-1} \le da.$$

Sečtením nerovnosti (1) a těchto tří nerovností již dostaneme dokazovanou nerovnost

$$4\sqrt{a^2-1} + 2\sqrt{b^2-4} + 4\sqrt{c^2-1} + 2\sqrt{d^2-4} \le$$
$$\le ab + bc + cd + da = (a+c)(b+d).$$

Rovnost v ní nastane, právě když nastane ve všech čtyřech uvažovaných nerovnostech, tedy právě když $4 = (a^2-1)(b^2-4) = (b^2-4)(c^2-1) = (c^2-1)(d^2-4) = (d^2-4)(a^2-1)$. Odtud již snadno dostaneme, že vzhledem k podmínkám úlohy nutně platí $c = a$, $d = b$. Aby všechny požadované druhé mocniny byly přirozenými čísly, musí dále platit (3).

Poznámka 1. Nerovnost (1) můžeme interpretovat i geometricky. Uvažujme trojúhelník ABC s úhly při vrcholech A a B o velikostech nejvýše $90°$. Označme D patu jeho výšky z vrcholu C a předpokládejme, že $|BC| = 2a$, $|AC| = b$ a $|DC| = 2$ (takový (případně degenerovaný) trojúhelník vzhledem k podmínkám $a \ge 1$, $b \ge 2$ jistě existuje). Podle Pythagorovy věty snadno dopočteme $|BD| = 2\sqrt{a^2-1}$, $|AD| = \sqrt{b^2-4}$.



Z dvojího vyjádřením obsahu trojúhelníku ABC a omezenosti funkce sinus platí

$$2\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-4} = \tfrac{1}{2}\,|BA|\cdot|CD| = \\ = \tfrac{1}{2}\,|BC|\cdot|AC|\sin|\sphericalangle BCA| = ab\sin|\sphericalangle BCA| \le ab.$$

Rovnost nastane, právě když trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C, což je podle obrácené věty k Eukleidově větě o výšce ekvivalentní podmínce (2).

Poznámka 2. Řešitelé s vesměs všemi neúplnými řešeními správně dokázali nerovnost pro reálná čísla, neuvědomili si však, že mají také hledat *přirozená* čísla, pro která nastává rovnost.

Správná řešení zaslali *Anastasia Bredikhina*, *Michal Janík* a *Samuel Rosiar*, všichni z GJK v Praze 6, *Tereza Černá* z G v Praze 9, Litoměřická, *Lenka Poljaková* z GJŠ v Přerově, *Jakub Štepo* z G v Kladně a *Ondřej Trinkewitz* z G a SPŠE ve Frenštátě pod Radhoštěm.

Neúplná řešení zaslali *Adam Červenka*, *Martin Dufek*, *Alena Janáčková*, *Jakub Koňárek*, *Lukáš Kycl*, *Štěpán Mikéska*, *Petr Slonek* a *Filip Smíšek*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Erik Ježek* ze SSPŠ a G v Praze 5, *Jan Slíva* z MG v Praze 6 a *Lukáš Wendzel* z G a SPŠEI ve Frenštátě p. Radhoštěm.

Úloha 280

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x(x^2+1) &= y^3+1,\\ y(y^2+1) &= z^3+1,\\ z(z^2+1) &= x^3+1. \end{aligned}$$

Jaroslav Švrček

Řešení. Obě funkce $f(x) = x(x^2+1) = x^3+x$ a $g(x) = x^3+1$ jsou zřejmě rostoucí, jelikož tuto vlastnost mají obě funkce $y = x^3$ a $y = x$.

Předpokládejme, že daná soustava má řešení x, y, z. Jelikož se jedná o cyklickou soustavu rovnic, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že číslo x je největší, tedy $x = \max\{x, y, z\}$. Jelikož funkce f je rostoucí, platí tak

$$f(x) = g(y) = \max\{f(x) = g(y), f(y) = g(z), f(z) = g(x)\}.$$

Funkce g je ovšem rostoucí, proto $y = \max\{x, y, z\}$. Podobným způsobem pak dokážeme, že i $z = \max\{x, y, z\}$. Proto nutně platí $x = y = z$ a dosazením do libovolné rovnice dané soustavy dostaneme její jediné řešení $x = y = z = 1$.

Jiné řešení. Pokud by se některá neznámá, bez újmy na obecnosti například x, rovnala 0, z první rovnice dané soustavy by platilo $y = -1$. Dosazením do druhé rovnice pak dostáváme $z = -\sqrt[3]{3}$. Jelikož $-3 - \sqrt[3]{3} < 0 < 1$, dostáváme spor se třetí rovnicí dané soustavy, proto $xyz \neq 0$. Odtud ovšem

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq \frac{3}{4}y^2 > 0.$$

Užitím vzorce pro rozdíl třetích mocnin dostáváme, že soustava je ekvivalentní se soustavou

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 1 - x,$$
$$(y - z)(y^2 + yz + z^2) = 1 - y,$$
$$(z - x)(z^2 + zx + x^2) = 1 - z.$$

Podobně jako v prvním odstavci ukážeme, že druhé činitele na levých stranách rovnic jsou kladné. Daná soustava rovnic má zřejmě řešení $x = y = z = 1$. Předpokládejme, že má i jiné řešení, potom alespoň jedna jeho složka, bez újmy na obecnosti x, je různá od 1. Pokud $x > 1$, z první rovnice upravené soustavy plyne $x - y < 0$, tedy $y > x > 1$. Ze druhé rovnice pak $y - z < 0$, tedy $z > y > x > 1$, což je ve sporu se třetí rovnicí. Podobně dovedeme ke sporu i případ $x < 1$, proto daná soustava má jediné řešení $x = y = z = 1$.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anastasia Bredikhina*, *Michal Janík* a *Samuel Rosiar*, všichni z GJK v Praze 6, *Tereza Černá* z G v Praze 9, Litoměřická, *Adam Červenka*, *Martin Dufek*, *Anna Hronová*, *Alena Janáčková*, *Jakub Koňárek*, *Lukáš Kycl*, *Štěpán Mikéska*, *Petr Slonek* a *Filip Smíšek*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Erik Ježek* ze SSPŠ a G v Praze 5, *Lenka Poljaková* z GJŠ v Přerově. *Pavla Sankotová* z G v Plzni, Mikulášské nám. a *Jan Slíva* z MG v Praze 6, *Jakub Štepo* z G v Kladně. *Ondřej Trinkewitz* z G a SPŠE ve Frenštátě pod Radhoštěm a *Lukáš Wendzel* z G a SPŠEI ve Frenštátě p. Radhoštěm.

Neúplná řešení zaslali *František Jáchim* z Volyně a *Jáchym Kouba* z GJŠ v Přerově.

Pavel Calábek