O úloze ze 43. ročníku Matematické olympiády

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

V Matematické olympiádě byly do soutěže dvakrát vybrány úlohy s neúplným autorským řešením, což pak způsobilo komplikace. Poprvé to byla úloha A-I-8 z prvního ročníku MO. Je i s kompletním řešením dostupná v ročence [5][1)] a její historii popsal J. Vyšín [4].

Druhou úlohou je MO 43 A-S-2 navržená J. Vinárkem. Organizace soutěže tehdy prodělávala krizi, a tak byla příprava úloh pro tento ročník jedním z prvních činů Úlohové komise ustanovené v září roku 1992 za účelem nápravy.

Až při soutěži se zjistilo, že autorské řešení této geometrické úlohy vynechalo jednu z možných situací. Pokusy doplnit řešení překračovaly rozsah učiva matematiky SŠ. Jedním z nich byl i můj návrh převést úlohu na sestrojení tečen z bodu k hyperbole.

Kolem roku 2009 jsem se k úloze vrátil a vyřešil ji metodou obsahů, která kromě znalosti funkce sinus a planimetrie na úrovni ZŠ požadovala jen umět řešit lineární a kvadratické rovnice. Kolegové z úlohové komise mě za to pochválili a zařadili i mezi autory ročenky [1], v níž však mé řešení nahradili abstraktnějším, jež využívá úsekový tvar rovnice přímky v kosoúhlých souřadnicích. Můj původní postup považuji za přístupnější širšímu okruhu zájemců. Uvedu jej i s historickým komentářem.

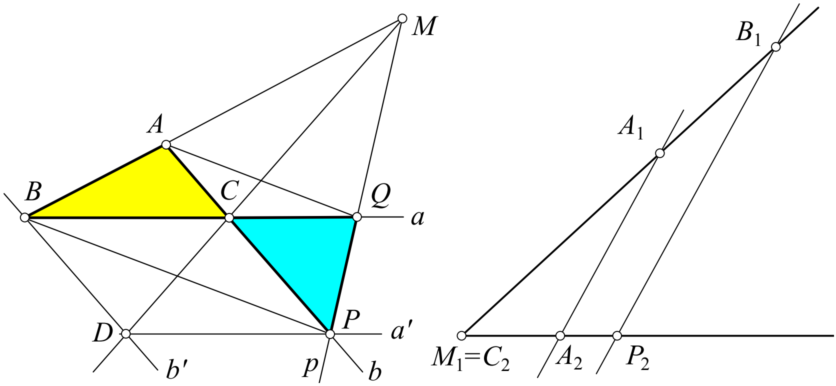
Úloha MO 43 A-S-2

Je dán trojúhelník ABC a bod M na polopřímce opačné k polopřímce AB. Bodem M veďte přímku $p \neq AB$ tak, aby její průsečíky P, Q s přímkami AC, BC určovaly trojúhelník PQC stejného obsahu, jako má trojúhelník ABC.

[1)] Všechny ročenky MO by měly být brzy dostupné v elektronické podobě z rozcestníku na stránkách Matematické olympiády.

Autorské řešení a průběh soutěže

Řešení popíšeme stručně pomocí obr. 1 vlevo. Z rovnosti obsahů trojúhelníků PQC a ABC plyne $S_{AQP} = S_{AQC} + S_{PQC} = S_{AQC} + S_{ABC} = S_{AQB}$. Navíc mají trojúhelníky AQP a AQB společnou základnu AQ, a proto k ní stejné výšky. Úsečky BP a AQ jsou tedy rovnoběžné a stejnolehlé ve ve stejnolehlosti se středem M, která zobrazí trojúhelník AQC na trojúhelník BPD, kde D je průsečík přímky MC a rovnoběžky b' vedené z bodu B k přímce $b = AC$.



Obr. 1 Řešení úlohy, pokud bod C leží mezi body A, P

Tím je dána konstrukce bodu D. Bod P nalezneme jako průsečík přímky AC s přímkou $a' \parallel BC$ vedenou bodem D. Úloha má za daných podmínek vždy jediné řešení, přímku $p = MP$. Triviální situaci $M = A$ zmíníme později.

Podstatné je, že autorské řešení nevyšetřuje další možnosti. Soutěžící, kteří si nakreslili obrázek s bodem A mezi body C a P, nedokázali úlohu vyřešit.

Ti úspěšnější vycházeli ze situace na obr. 1. Pokud zjistili, že $BP \parallel AQ$, dokončovali postup i jinak. Opravoval jsem tehdy klauzurní kolo na strakonickém gymnáziu a potěšilo mne řešení Jana Rychtáře ze třídy 3.A. Ten konstatoval, že jsou úsečky BP a AQ stejnolehlé dvojím způsobem. První stejnolehlost má střed C, druhá střed M. Absolutní hodnoty koeficientů stejnolehlostí jsou stejné, rovnají se podílu délek obou úseček, a tak

$$\frac{|CP|}{|CA|} = \frac{|MB|}{|MA|}.$$

Délku úsečky CP sestrojil z tohoto vztahu jako čtvrtou geometrickou úměrnou (obr. 1 vpravo), a pak ji do zadání přenesl na polopřímku opačnou k polopřímce CA.

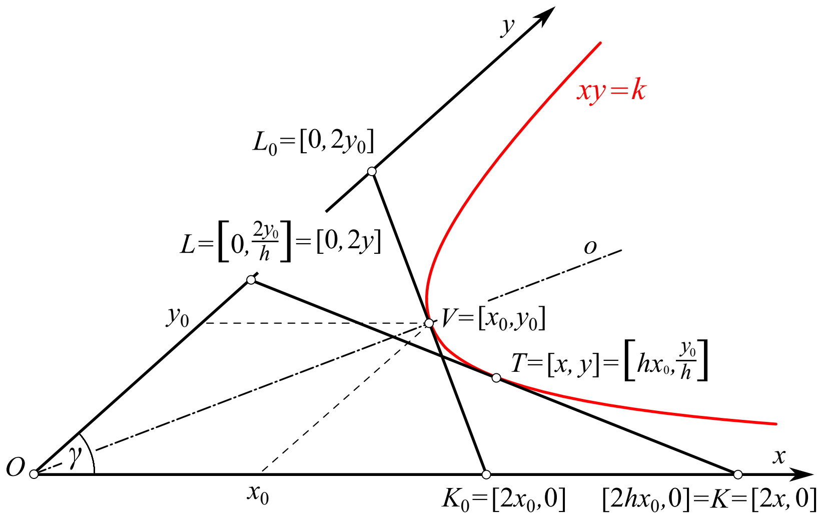
Po soutěži

Organizátoři i studenti hledali úplné řešení úlohy. Jedno, postavené na poznatcích z matematické analýzy navrhl P. Kaňovský, student 3. A z Gymnázia Brno, tř. Kapitána Jaroše. Mně se díky článku [2] podařilo převést úlohu na sestrojení tečen z bodu M k hyperbole.

Řešení využívá poznatku, že tečny k hyperbole oddělují od úhlu jejích asymptot trojúhelníky téhož obsahu. Snadno to dokážeme pomocí zobrazení $\mathcal{H}$ zvaného *hyperbolická rotace*, jež je v ortonormální (ale ne nutně pravoúhlé) soustavě souřadnic Oxy dáno předpisem

$$\mathcal{H}\colon x' = hx,\ y' = \frac{y}{h},\quad \text{kde } h \notin \{0, 1\} \text{ je reálná konstanta.} \tag{1}$$

Nazývá se tak proto, že každý bod hyperboly $xy = k$ zobrazuje na jiný bod téže hyperboly. Dosazením parametrického vyjádření přímky nebo úsečky do (1) se lze přesvědčit, že zobrazuje přímku na přímku a úsečku na úsečku. Asymptoty hyperboly $xy = k$ (tzn. osy soustavy souřadnic) jsou samodružné.



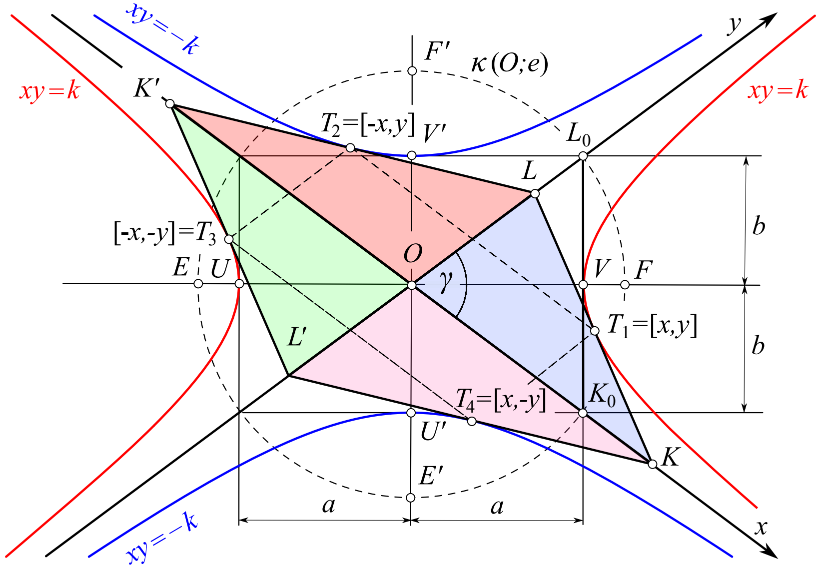
Obr. 2 K vlastnostem hyperbolické rotace

Uvažujme nejprve situaci na obr. 2. Úsečka K_0L_0 je část vrcholové tečny hyperboly $xy = k > 0$ ohraničená jejími asymptotami. Vrchol $V = [x_0, y_0]$ hyperboly je středem úsečky K_0L_0, jak plyne ze souměrnosti podle přímky OV. Lze tedy psát $K_0 = [2x_0, 0]$ a $L_0 = [0, 2y_0]$.

Je-li $T = [x, y]$ jiný bod větve hyperboly, pak při volbě $h = \frac{x}{x_0}$ platí $T = \mathcal{H}(V)$. Tečna hyperboly v bodě T je obrazem tečny v bodě V. Protíná asymptoty v bodech $K = \mathcal{H}(K_0)$, a $L = \mathcal{H}(L_0)$. Odtud a z obr. 2 vidíme, že $K = [2x, 0]$, $L = [0, 2y]$ a dotykový bod T je středem úsečky KL. Trojúhelníky OKL a OK_0L_0 mají stejný obsah S, neboť

$$S = \frac{1}{2}|OK| \cdot |OL| \sin\gamma = 2xy \sin\gamma = 2x_0y_0 \sin\gamma = S_{OK_0L_0}.$$

Rozšiřme nyní úvahy na celou rovinu. Asymptoty ji rozdělují na 4 úhly, v každém z nich se nachází jedna z větví hyperbol $xy = k$ a $xy = -k$. Jejich poloosy značíme a, b a excentricitu e. Z definice hyperboly je známo, že $a^2 + b^2 = e^2$ a v trojúhelníku OK_0L_0 je $|K_0L_0| = 2b$, $|OK_0| = |OL_0| = e$, $|OV| = a$ (obr. 3).



Obr. 3 Konstrukce tečen z bodu M k hyperbole

Mezi všemi tečnami k těmto hyperbolám existují vždy čtyři, jejichž body dotyku mají až na znaménka stejné souřadnice. Při označení podle obr. 3

tyto tečny ohraničují rovnoběžník $KLK'L'$, jehož úhlopříčky se protínají v počátku O soustavy souřadnic.

Není těžké ověřit, že pro obsah S každého z trojúhelníků OKL, OLK', $OK'L'$ a $OL'K$ platí

$$S = \frac{1}{2}|OK| \cdot |OL| \sin\gamma = \frac{1}{2}e^2 \sin\gamma = ab = 2|xy| \sin\gamma = 2|k| \sin\gamma \qquad (2)$$

Aplikací uvedených poznatků na úlohu A-S-2 zjišťujeme, že k jejímu vyřešení stačí zvolit soustavu souřadnic Cxy s osami x, y na přímkách CB, CA, a z bodu M sestrojit všechny tečny k hyperbolám o rovnicích

$$xy = \pm\frac{e^2}{4}, \quad \text{kde } e = \sqrt{|CA| \cdot |CB|}. \qquad (3)$$

Sestrojení tečen lze provést kružítkem a pravítkem, aniž bychom hyperboly rýsovali. Stačí znát jen umístění jejich ohnisek a vrcholů. Úsečku délky e potřebnou k určení ohnisek sestrojíme s využitím vztahu (3) pomocí některé z Eukleidových vět.

Má-li hyperbola ohniska E, F a vrcholy U, V, pak tzv. *vrcholová kružnice* sestrojená nad průměrem UV je množinou všech pat kolmic z ohnisek E, F na tečny hyperboly. Tečny z bodu M jsou tedy přímky MZ, kde bod Z patří do průniku vrcholové kružnice s Thaletovou kružnicí nad průměrem MF (nebo ME).

Na obr. 4 vidíme výsledek řešení úlohy pro situaci, kdy lze sestrojit všechny čtyři tečny z bodu M k hyperbolám. Jednou z nich je přímka AB, a tak úloze vyhovují nejvýše tři trojúhelníky PQC. Podrobnější diskusi řešitelnosti uvedeme níže.

Řešení z roku 2009

Úloha je polohová, trojúhelník ABC i s bodem M jsou již v rovině umístěny. Díky tomu lze zkoušet různé volby výchozích i neznámých veličin s cílem nalézt řešení. Cestu k úspěchu odhalil náčrtek situace na obr. 5, kde r, s, u, v jsou po řadě vzdálenosti bodů B, A, P, Q od přímky CM.

Situace 1. Nechť se bod A nachází mezi body P a C. Rovnost $S_{PCQ} = S_{ABC}$ lze zapsat ve tvaru

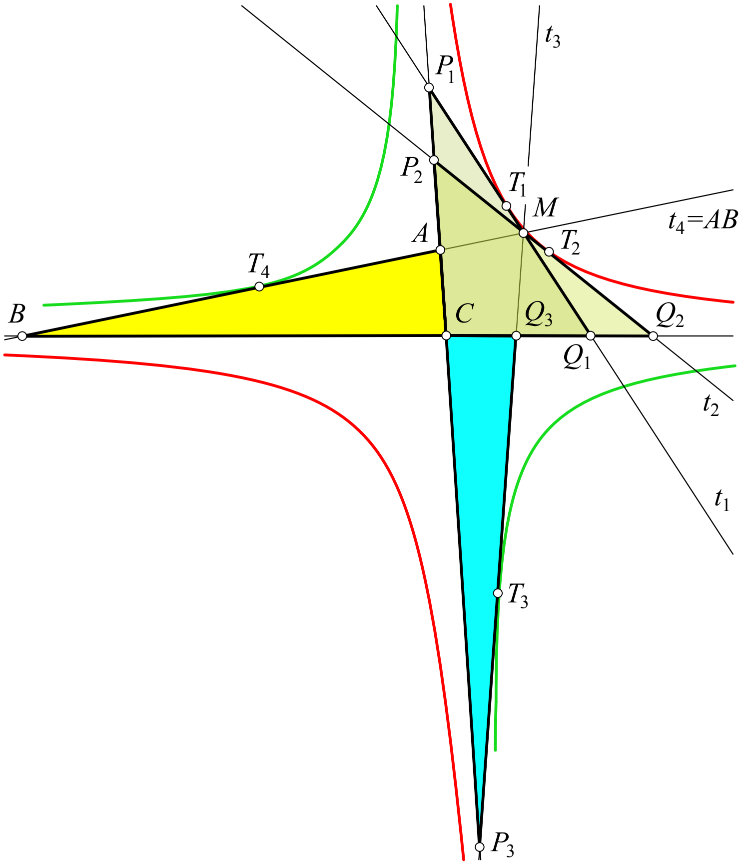
$$S_{CMP} + S_{CMQ} = S_{CMB} - S_{CMA}.$$

Odtud dostáváme vztah

$$\frac{1}{2}|CM|u + \frac{1}{2}|CM|v = \frac{1}{2}|CM|r - \frac{1}{2}|CM|s,$$

z nějž plyne

$$u + v = r - s. \tag{4}$$



Obr. 4 Tři řešení úlohy A-S-2

Jiný zápis rovnosti $S_{PCQ} = S_{ABC}$ má tvar

$$\frac{1}{2}|CQ| \cdot |CP| \sin(\pi - \gamma) = \frac{1}{2}|CB| \cdot |CA| \sin\gamma,$$

a tak platí

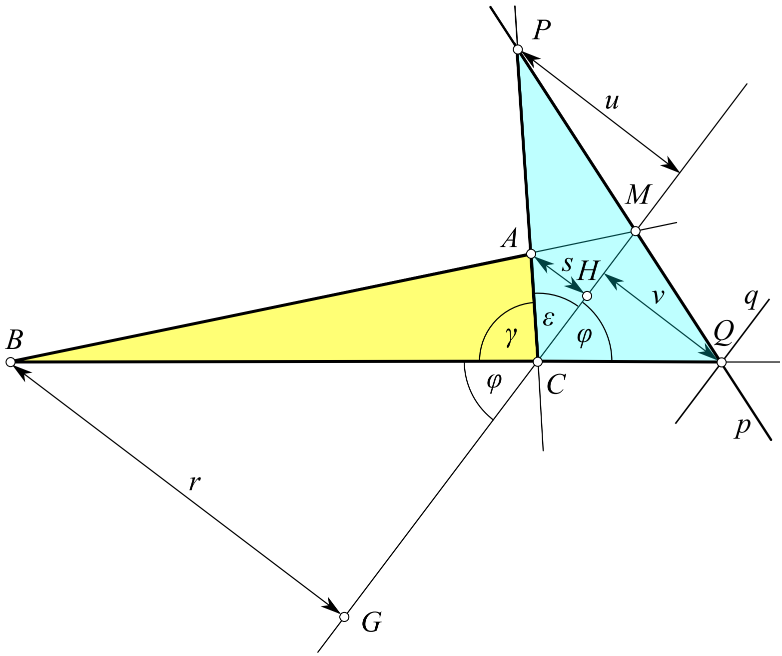
$$|CQ| \cdot |CP| = |CB| \cdot |CA|.$$

Při označení podle obr. 5 odtud dostáváme

$$(|CQ| \sin \varphi) \cdot (|CP| \sin \varepsilon) = (|CB| \sin \varphi) \cdot (|CA| \sin \varepsilon),$$

neboli

$$uv = rs. \tag{5}$$



Obr. 5 K rozboru při řešení z roku 2009

Vztahy (4) a (5) platí, i když se pata G kolmice z bodu B na přímku CM nachází na polopřímce CM (ověření je analogické), a představují soustavu rovnic s neznámými u a v. Eliminací neznámé v z ní obdržíme kvadratickou rovnici

$$u^2 - (r-s)u + rs = 0 \quad \text{s diskriminantem } D = (r-s)^2 - 4rs. \tag{6}$$

Ze vztahů (4) a (6) plyne $r - s > \sqrt{D}$, a tak

$$u_{1,2} = \frac{r - s \pm \sqrt{D}}{2} > 0, \quad \text{právě když } D \geq 0. \tag{7}$$

Podmínka $D \geq 0$ vede po dosazení ze vztahu (6) k nerovnosti

$$z^2 - 6z + 1 \geq 0,$$

s neznámou

$$z = \frac{r}{s} = \frac{|BM|}{|AM|} > 1.$$

(Viz obr. 5 a podobnost trojúhelníků BMG a AMH.)

Po jejím vyřešení zjistíme, že úloze vyhovují dva trojúhelníky MP_1Q_1 a MP_2Q_2, právě když platí

$$0 < |AM| < (3 - 2\sqrt{2})|BM|, \quad \text{neboli} \quad 0 < |AM| < \frac{\sqrt{2}-1}{2}|AB|.$$

Konstrukci úseček o délkách $u_{1,2}$ na základě předešlých výpočtů ponecháváme čtenáři. Jedna z možností je popsána v příspěvku [3]. Sestrojení přímek $q_{1,2} \parallel AC$, které určují body $Q_{1,2}$, jakož i přímek $p_{1,2}$, je zřejmé.

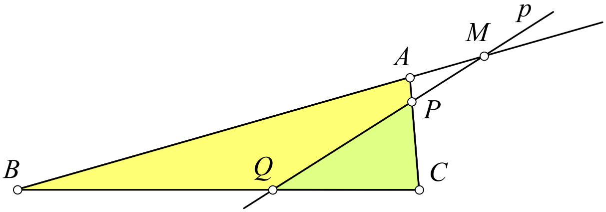
Pokud platí

$$|AM| = \frac{\sqrt{2}-1}{2}|AB|,$$

což je ekvivalentní s podmínkou $r = (3 + 2\sqrt{2})s$, má rovnice (6) dvojnásobný kořen $u_1 = u_2 = (1+\sqrt{2})s$. Úloze vyhovuje jediný trojúhelník PQC.

Situace 2. Možnost $P = A$ nastane, jen když platí $M = A$, a odtud $s = v = 0$. Ze vztahu (4) dostáváme $u = r$. Řešením je trojúhelník AQC, kde Q je obraz bodu B ve středové souměrnosti se středem C.

Situace 3. Bod P leží na úsečce AC a $P \neq A$. Pak přímka $p = MP$ protíná úsečku BC v bodě Q. Trojúhelník PQC vznikne, jen když $P \neq C$. Nevyhovuje však podmínkám úlohy, neboť $S_{PQC} < S_{ABC}$ (obr. 6).



Obr. 6 Situace, kdy je bod P uvnitř strany AC

Situace 4. Bod C se nachází mezi body A, P, obr. 7. Platí

$$S_{CMP} - S_{CMQ} = S_{CMB} - S_{CMA}.$$

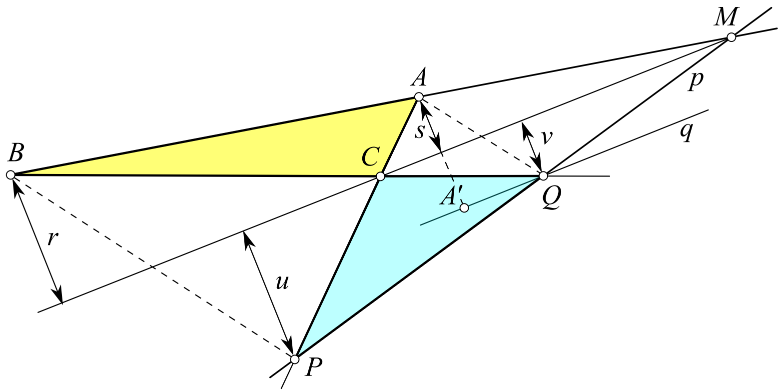
Analogicky, jako při řešení situace 1, dospějeme k soustavě

$$u - v = r - s$$
$$uv = rs,$$

z níž eliminací v, resp. u, získáme po úpravě rovnici

$$(u - r)(u + s) = 0, \quad \text{resp.} \quad (v - s)(v + r) = 0.$$

Úloze vyhovují jen kladné kořeny $u = r$ a $v = s$.



Obr. 7 Řešení úlohy za předpokladu, že bod C se nachází mezi body A, P

Stačí tedy sestrojit obraz jednoho z bodů bodu A, B v osové souměrnosti podle CM a jím vést přímku $q \parallel CM$. Pak $Q \in q \cap BC$ a $p = MQ$. Úloha má pro tuto situaci vždy jediné řešení.

Poznámka. Nabízí se i využití dvojí stejnolehlosti úseček BP a AQ. Platí

$$\frac{r}{s} = \frac{|MB|}{|MA|} = \frac{|MP|}{|MQ|} = \frac{u}{v} \quad \text{a} \quad \frac{r}{v} = \frac{|CB|}{|CQ|} = \frac{|CP|}{|CA|} = \frac{u}{s},$$

odtud $su = rv$ a zároveň $vu = rs$. Z posledních vztahů plyne

$$u^2vs = r^2vs, \quad \text{resp.} \quad v^2ru = s^2ru,$$

odtud $u = r$ a $v = s$.

Důsledkem je poznatek, že přímka CM z obr. 7 prochází středy základen AQ a BP lichoběžníku $BPQA$, známý i z projektivní geometrie.

Shrnutí diskuse řešitelnosti úlohy. Označíme-li

$$m = \frac{\sqrt{2}-1}{2},$$

má úloha jedno řešení, právě když platí $|AM| > m\,|AB|$, nebo $M = A$.

Je-li $0 < |AM| < m\,|AB|$, pak má úloha tři řešení, a za předpokladu $|AM| = m\,|AB|$ má dvě řešení.

Závěr

Malá epizoda z historie MO poskytla dva náměty pro práci s matematickými talenty.

Seznámení s afinitou (1) vede k rozšíření středoškolských poznatků o hyperbole. Spolu s využitím nástrojů dynamické geometrie může studenty zaujmout a lze je doplnit, například o vyšetřování množiny přímek, které dělí daný trojúhelník na dvě části téhož obsahu.

Druhé řešení úlohy MO 43 A-S-2 ukazuje, jak může vhodná volba proměnných usnadnit řešení problému. Zároveň upozorňuje na tzv. *metodu obsahů*, jejíž podstatou je získávání užitečných vztahů z rovnosti různých vyjádření obsahu rovnoplochých útvarů.

Literatura

[1] *Horák, K. a kol.:* Čtyřicátý třetí ročník Matematické olympiady na středních školách, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2016

[2] *Kotin, O., Majorov, A.:* Semjejstvo prjamych děljaščich ploščaď popolam, Kvant, roč. 21 (1990), č.8, s. 20-24.

[3] *Leischner, P.:* Příběh úlohy MO 43-A-S-2. Ani jeden matematický talent nazmar, sborník příspěvků 4. ročníku konference, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Praha, 2009, s. 41-52. Dostupné na *https://www.suma.jcmf.cz/materialy-pro-ucitele/sborniky-z-konferenci/*

[4] *Vyšín, J.:* Vyprávění o úlohách MO. Matematická olympiáda 1951-1981, Prometheus, Praha, 1981, s. 143-148.

[5] *Vyšín, J., Zelinka, R.:* První ročník matematické olympiady, SPN, Praha, 1952