GaoKao – přijímací zkouška na čínské univerzity

DAG HRUBÝ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Cílem článku je informovat naše čtenáře o vstupní zkoušce na vysoké školy v Číně. Tuto zkoušku, která je známá pod názvem GaoKao[1)] – The National College Entrance Examination (NCEE), skládají čínští středoškoláci každoročně obvykle počátkem června. Je to také *jediné* kritérium pro přijetí na čínské univerzity. Zkouška trvá zhruba 9 hodin ve dvou nebo ve třech dnech, a to v závislosti na provincii, v níž se koná. V povinné části vykonají všichni žáci zkoušku z *čínského jazyka, cizího jazyka* a *matematiky.* Za každý z těchto tří předmětů lze získat maximálně 150 bodů, celkově tedy 450 bodů. Ve volitelné části si žáci vybírají ze *dvou zaměření.* Adepti společenských věd tak dále absolvují test z historie, politologie a geografie, uchazeči o přírodovědná a technická studia jsou testováni z fyziky, chemie a biologie, přičemž v každém z nich lze získat maximálně 300 bodů. Nejvyšší možný počet dosažených bodů je tedy 750.

Všechny zkoušky jsou písemné. K tomu, aby žák byl přijat na prestižní čínskou univerzitu musí dosáhnout aspoň 500 bodů. K přijetí na univerzity střední úrovně musí žák dosáhnout 333 až 375 bodů. Podle čínského ministerstva školství dosáhl počet zájemců o přijímací zkoušku GaoKao v roce 2022 celkově 11,93 milionu.

Mezi nejprestižnější čínské univerzity patří Univerzita Čching-chua (Tsinghua University) a Pekingská univerzita (Peking University). V žebříčku World University Rankings 2022 se šest čínských univerzit dostalo do první stovky nejlepších univerzit (např. v Německu je jich 7). Pekingská univerzita a univerzita Tsinghua se v žebříčku dělí společně o 16.–17. místo a jsou nejvýše hodnocenými univerzitami mimo Velkou Británii a USA. V roce 2021 univerzita Tsinghua požadovala pro přijetí aspoň 676 bodů ve zkoušce GaoKao, Pekingská univerzita požadovala aspoň 683 body.

Abychom si učinili představu o náročnosti této zkoušky z matematiky, uvedeme zadání některých úloh z roku 2022. Kromě modifikovaného řešení

[1)] též Gao Kao nebo Gaokao

1. příkladu, viz [3], zde uvádíme také alternativní způsob řešení části a) této úlohy.

Příklad 1

Nechť S_n je součet prvních n členů posloupnosti (a_n), kde $a_1 = 1$ a $\left(\frac{S_n}{a_n}\right)$ je aritmetická posloupnost s diferencí $\frac{1}{3}$.

a) Určete (a_n).

b) Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} < 2.$$

Řešení.

a) Pro každé n přirozené platí $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Označme $b_n = S_n/a_n$, přičemž podle zadání je (b_n) aritmetická posloupnost s diferencí $\frac{1}{3}$ a prvním členem $b_1 = S_1/a_1 = 1$. Pak platí

$$\frac{S_n}{a_n} = b_n = b_1 + (n-1)d = 1 + \frac{1}{3}(n-1) = \frac{n+2}{3} \tag{1}$$

a odtud již bezprostředně plyne

$$S_n = \frac{1}{3}(n+2)a_n$$

a také

$$S_{n+1} = \frac{1}{3}(n+3)a_{n+1}.$$

Uvážíme-li ještě, že $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, obdržíme po dosazení za S_n a S_{n+1} z výše uvedených rovností

$$\frac{1}{3}(n+3)a_{n+1} = \frac{1}{3}(n+2)a_n + a_{n+1}$$

a po snadné úpravě následně

$$a_{n+1} = \left(\frac{n+2}{n}\right)a_n. \tag{2}$$

Dostáváme tak zadání posloupnosti (a_n) pomocí rekurentního vztahu (2), který je lineární, s prvním členem $a_1 = 1$. Naším cílem je však určit n-tý člen této posloupnosti explicitně, tj. pouze pomocí n (jako funkci proměnné n). Platí tedy

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n+1}{n-1}a_{n-1},\\
a_{n-1} &= \frac{n}{n-2}a_{n-2},\\
a_{n-2} &= \frac{n-1}{n-3}a_{n-3},\\
&\vdots\\
a_3 &= \frac{4}{2}a_2,\\
a_2 &= \frac{3}{1}a_1.
\end{aligned}$$

Součinem všech $n-1$ předešlých rovností (s využitím $a_1 = 1$) po úpravě obdržíme

$$a_n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

b) Nyní dokážeme, že pro všechna n přirozená platí nerovnost

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = \frac{2}{1\cdot 2} + \frac{2}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{2}{n(n+1)} < 2. \tag{3}$$

Vzhledem k tomu, že pro každé přirozené číslo k platí

$$\frac{2}{k(k+1)} = 2\cdot\frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right),$$

lze levou stranu (3) napsat ve tvaru

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = \frac{2}{1\cdot 2} + \frac{2}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{2}{n(n+1)} =$$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < 2,$$

což jsme chtěli dokázat.

Důsledek

Pro součet S_n prvních n členů uvažované posloupnosti (a_n) pak platí

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \ldots + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2),$$

viz např. [1] nebo [2]. K témuž výsledku lze dospět také přímo užitím vztahu (1).

Jiný způsob řešení části a) poskytl *Jaroslav Švrček.*

Nejprve vypočteme a_n pro několik prvních hodnot n. Zjistíme, že platí $a_2 = 3$, $a_3 = 6$, $a_4 = 10$ atd. Nyní můžeme vyslovit hypotézu: Pro všechna n přirozená platí $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Dokážeme ji užitím principu tzv. *silné* matematické indukce vzhledem k n.

(i) Pro $n = 1$ dané tvrzení platí, neboť $a_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = 1$.

(ii) Předpokládejme dále, že dané tvrzení platí pro všechna k přirozená, kde $1 \leq k \leq n$, tj. že platí

$$a_k = \frac{1}{2}k(k+1),$$

a tedy

$$S_k = \frac{1}{6}k(k+1)(k+2),$$

viz důsledek v závěru prvního řešení této úlohy. Nyní dokážeme, že tvrzení platí také pro $n+1$. Vzhledem k tomu, že (S_n/a_n) je aritmetická posloupnost s diferencí $\frac{1}{3}$, platí s využitím vztahu $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

$$\frac{S_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{S_n + a_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{S_n}{a_{n+1}} + 1 = \frac{S_n}{a_n} + \frac{1}{3}.$$

Z poslední rovnice vpravo, uvedeného předpokladu (ii) a důsledku na konci prvního řešení, tj. dosazením za $S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$, po úpravě dostáváme

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Tím je dokázáno, že tvrzení platí i pro $n+1$.

Spojením obou kroků (i) a (ii) je tak dokázáno, že pro všechna přirozená n platí $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Následující úlohy (2–4) z testů GaoKao a jsou určeny zájemcům o tuto problematiku. Nejzdařilejší čtenářská řešení těchto úloh zaslaná do redakce časopisu MFI rádi zveřejníme.

Příklad 2

V trojúhelníku ABC s vnitřními úhly α, β, γ a odpovídajími stranami a, b, c platí

$$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{\sin 2\beta}{1+\cos 2\beta}.$$

a) Určete velikost β, je-li $\gamma = \dfrac{2\pi}{3}$.

b) Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$.

Příklad 3

Určete koeficient u členu x^2y^6 v rozvoji výrazu

$$\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8.$$

Poslední, náročnější úloha pochází ze sady testu GaoKao z roku 2008.

Příklad 4

Je dána funkce f reálné proměnné x

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+a}} + \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{\frac{ax}{ax+8}},$$

s kladným reálným parametrem a. Dokažte, že pro všechna kladná reálná čísla x platí

$$1 < f(x) < 2.$$

Literatura

[1] *Švrček, J.*: Úvod do kombinatoriky. Vydavatelství UP, Olomouc, 2008.

[2] *Vilenkin, N. J.*: Kombinatorika. SNTL, Polytechnická knižnice, Praha, 1977.

[3] 2022 China's Math GaoKao (Problem 17). Dostupné z: `https://www.youtube.com/`