Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 30. 9. 2023 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 285

Dokažte, že pro každou číslici $c \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ existuje takové přirozené číslo L_c, že počet všech přirozených čísel nejvýše rovných L_c, v jejichž desítkovém zápisu se vyskytuje číslice c, je roven $L_c/2$.

Józef Kalinowski (Polsko)

Úloha 286

Kružnice k, l se protínají v bodech A, B $(A \neq B)$. Přímka, která prochází bodem A, protíná tyto kružnice po řadě v bodech C, D $(C \neq A \neq D)$. Dokažte, že osy všech úseček CD procházejí společným bodem.

Pavel Leischner

Dále uvádíme řešení úloh 281 a 282, jejichž zadání jsme zveřejnili ve čtvrtém čísle loňského (32.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 281

Nechť d_k značí počet jednomístných dělitelů libovolného přirozeného čísla k.

a) Dokažte, že pro každé kladné celé čislo n platí

$$\frac{d_{n+1} + d_{n+2} + \ldots + d_{n+20}}{20} < 3.$$

b) Dokažte, že existuje kladné celé číslo n, pro které platí

$$\frac{d_{n+1} + d_{n+2} + \ldots + d_{n+19}}{19} > 3.$$

Josef Tkadlec

Řešení.

a) Jednomístní dělitelé jsou čísla $k \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Místo toho, abychom počítali počet dělitelů každého z dvaceti po sobě jdoucích přirozených čísel

$n+1,\ n+2,\dots,n+20$ určíme kolik z nich je dělitelných číslem každým z uvažovaných čísel k, tento počet označme s_k. Potom jistě

$$d_{n+1}+d_{n+2}+\ldots+d_{n+20}=s_1+s_2+\ldots+s_9.$$

Zřejmě pro 20 po sobě jdoucích čísel platí

$$s_k\le\left\lceil\frac{20}{k}\right\rceil,$$

kde $\lceil x\rceil$ je *horní celá část* reálného čísla x, tedy nejmenší celé číslo, které je větší nebo rovno x. Platí

$$\begin{aligned}\frac{d_{n+1}+d_{n+2}+\ldots+d_{n+20}}{20}&=\\ &=\frac{s_1+s_2+\ldots+s_9}{20}\le\frac{\lceil\frac{20}{1}\rceil+\lceil\frac{20}{2}\rceil+\ldots+\lceil\frac{20}{9}\rceil}{20}=\\ &=\frac{20+10+7+5+4+4+3+3+3}{20}=\frac{59}{20}<3,\end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

b) Položme $n=9!-1$ a označme podobně jako v předcházející částí s_k počet čísel z množiny (nyní 19 po sobě jdoucích čísel)

$$\{n+1,n+2,\dots,n+19\},$$

která jsou dělitelná číslem k. Stejně jako v části a) nyní pro dané číslo n dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{d_{n+1}+d_{n+2}+\ldots+d_{n+19}}{19}&=\frac{s_1+s_2+\ldots+s_9}{19}=\\ &=\frac{19+10+7+5+4+4+3+3+3}{19}=\frac{58}{19}>3,\end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Poznámka 1. Stejnou úvahu v části b), která nám zajišťuje největší možný počet s_k, jsme mohli provést také pro číslo $n-1$, kde n je nejmenším společným násobkem čísel $1,\ 2,\dots,\ 9$, tedy pro číslo $n=2520-1=2519$.

Správná řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan, *Petr Kneys* z G U Balvanu v Jablonci nad Nisou, *Jáchym Kouba* a *Lenka Poljaková*, oba z GJŠ v Přerově a *Piotr Szatan* z II LO v Tarnovských Horách (Polsko).

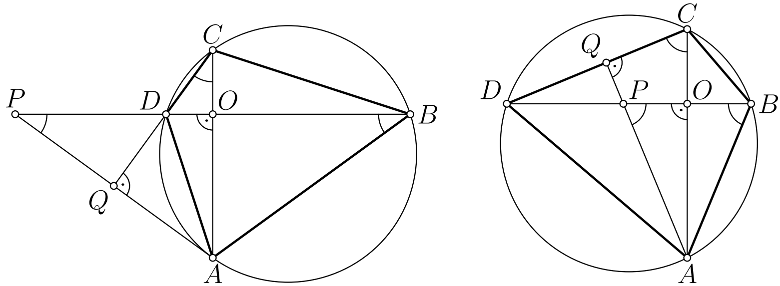
Neúplná řešení zaslali *Štěpán Pospíšil* a *Martin Skýpala*, oba z GJŠ v Přerově.

Úloha 282

Je dán tětivový čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami. Označme P průsečík kolmice z vrcholu A k přímce CD s přímkou BD. Dokažte, že body P a B mají od vrcholu A stejnou vzdálenost.

Vojtěch Zlámal

Řešení. Označme dále Q patu kolmice z bodu A na přímku CD a O průsečík úhlopříček čtyřúhelníku $ABCD$. Tětivový čtyřúhelník je konvexní, bod Q proto leží na polopřímce CD a bod P tak leží na polopřímce OD. Na obrázcích jsou situace pro případy, kdy bod Q leží uvnitř či vně úsečky CD. Aby tvrzení ze zadání platilo stačí dokázat, že ABP je rovnoramenný trojúhelník s hlavním vrcholem A, což je ekvivalentní s tvrzením, že jeho vnitřní úhly při vrcholech B a P mají stejnou velikost.



Jelikož $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník, podle věty o obvodovém úhlu jsou úhly ABD (tedy ABP) a ACD (tedy ACQ) shodné. Pravoúhlé trojúhelníky ACQ a AOP s pravými úhly při vrcholech O a P se dále shodují ve vnitřním úhlu při vrcholu A, jsou tak podobné a úhel ACQ je shodný s úhlem APO (tedy APB), což jsme chtěli dokázat.

Poznámka 2. František Jáchim si všiml, že bod P je průsečíkem výšek trojúhelníku ACD. Pro výpočet velikosti úhlu APB pak lze použít známého tvrzení o úhlech, pod kterými se tyto výšky protínají.

Správná řešení zaslali *Eliška Andrýsková, Radim Krška, Jindřich Kukla, Martin Skýpala*, *Lenka Poljaková* a *Lucian Poljak*, všichni z GJŠ v Přerově, *Anton Hnáth* z Moravan, *Sofie Choutková* z G U Balvanu v Jablonci nad Nisou a *František Jáchim* z Volyně.

Pavel Calábek