Úlohy z mechaniky v letošním ročníku Výfuku

VERONIKA BARTÁKOVÁ – PAVLA ŠIMOVÁ

Slovanské gymnázium Olomouc – Gymnázium Šumperk

Mezi žáky základních škol se setkáváme s mnoha různými přístupy k fyzice jako předmětu. Některé nadchne sama o sobě a chtějí jí porozumět více. Některým zase často připadá nudná a nebaví je učit se nazpaměť spousty vzorečků, kterým ani pořádně nerozumí. A jiným by se třeba i líbila, kdyby měli více prostoru si ji sami vyzkoušet a objevovat, jak doopravdy funguje.

Nejen pro všechny tyto je tu korespondenční seminář *Výpočty fyzikálních úkolů*, zkráceně *Výfuk*, který se snaží ukázat, že fyzika je vlastně velmi zábavné a fascinující téma. Pomocí zajímavých úloh, jak teoretických, tak experimentálních, jeho řešitelé pomalu poznávají zákony, podle kterých se svět kolem nás řídí.

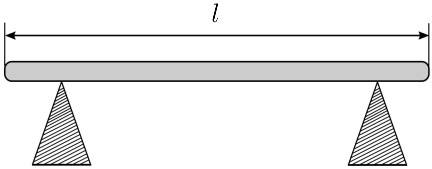
Úlohy ve Výfuku jsou připraveny na míru žákům druhého stupně základních škol tím způsobem, aby zaujaly své řešitele a přiblížily jim fyziku a matematiku v celé jejich kráse, jak se můžete přesvědčit na dalších řádcích. Kromě úloh samotných je motivací pro účast v semináři také spousta zajímavých cen pro nejúspěšnější řešitele a především možnost zúčastnit se v průběhu roku několika akcí, mezi kterými je největší a nejoblíbenější událostí letní tábor. Na akcích se děti mohou setkat s organizátory a dalšími řešiteli. Často zde vznikají přátelství na dlouhá léta. Účastníci potkají podobně smýšlející kamarády a získají motivaci pro další studium. Mnohdy to následně dotáhnou k účasti na mezinárodních olympiádách nebo studiu na prestižních školách v Česku i zahraničí. Řešit Výfuk se zkrátka vyplatí.

V tomto článku se tedy podíváme na to, na jaké zajímavé úlohy z oblasti mechaniky mohli řešitelé v letošním ročníku zatím narazit.

Dvě podpěry (1. úloha 2. série)

Mějme dvě stejně vysoké svislé podpěry a položme na ně homogenní tyč délky l (viz obr. 1). Lubora by zajímalo, jak daleko od sebe mají být podpěry *vzdáleny a jakým způsobem na ně položit tyč, aby byla tyč co nejstabilnější. Dokážete mu poradit?*

Stabilitu definujeme jako minimální vzdálenost, o kterou musíme tyč posunout, než z libovolné podpěry spadne. Vzdálenost podpěr a polohu tyče vyjádřete v násobcích délky tyče l.



Obr. 1 Dvě podpěry (zadání)

První úlohy v každé sérii bývají vždy ty nejjednodušší. Proto jsou určeny pouze pro žáky šestých a sedmých tříd, starším řešitelům se za ně body neudělují. Přesto i mezi těmito příklady můžeme nalézt opravdu zajímavé kousky, jako je třeba právě tato úloha. U prvních úloh je časté, že existuje mnoho různých přístupů a cest, jak se dostat k jejich řešení. Zde uvádíme jedno řešení velmi intuitivní a jedno využívající jednoduchého, ale pěkného nápadu.

První přístup se snaží maximálně oddálit pád tyče. Lze si snadno uvědomit, že k převrhnutí tyče dojde v jednom ze dvou případů. Buď v okamžiku, kdy se obě podpěry ocitnou pod stejnou polovinou tyče, nebo tehdy, kdy jedna z podpěr přestane tyč podpírat. Umístíme-li podpěry dále od sebe, dá nám větší práci, aby došlo k první z možností, zato však bude snazší dosáhnout druhé varianty. Dáme-li podpěry naopak blízko k sobě, situace se přesně obrátí. Nejvýhodnější pro nás tedy určitě je možnost, kdy dojde k oběma scénářům současně – tedy v jednom okamžiku bude jedna podpěra přesně uprostřed tyče a druhá přesně na jejím konci. Nejvýhodnější vzdálenost podpěr je tedy $l/2$.

Kromě tohoto postupu lze však úlohu vyřešit i přesněji za pomoci úvah o těžišti tyče. Opět si uvědomme, že tyč spadne ve chvíli, kdy ji jedna z podpěr přestane podpírat, nebo když se těžiště přestane nacházet mezi podpěrami.

Představíme-li si nyní pouze polovinu tyče, pak jeden její okraj je koncem tyče a druhý je těžištěm. Nyní je již dobře patrné, že podpěru musíme pro největší stabilitu umístit doprostřed poloviny tyče. Pokud bychom ji umístili blíže k jednomu z okrajů, tak se tím vždy zmenší vzdálenost podpěry buď od těžiště, nebo od okraje, a tím pádem i vzdálenost, o kterou musíme tyč posunout, aby spadla. Po složení obou polovin tyče dohromady bude vzdálenost mezi podpěrami opět $l/2$.

Stav beztíže (4. úloha 2. série)

Jirka se vydal na večerní procházku s přáteli. V průběhu večera si všiml, že přes oblohu přeletěla Mezinárodní vesmírná stanice (ISS). Jeden z kamarádů se jej zeptal, jak vysoko nad povrchem ISS obíhá. Jirka si však výšku nepamatuje a on, ani žádný z jeho přátel, nemají signál, proto si údaj nemohou vyhledat na internetu. Rozhodl se tedy, že výšku h ISS nad povrchem spočítá. Pozoroval proto noční oblohu a na hodinkách změřil, že další přelet ISS nastal o $T = 93\ \mathrm{min}$ později. Dále si vzpomněl, že poloměr Země je $R = 6\,378\ \mathrm{km}$ a gravitační zrychlení na povrchu je $a_g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Spočítejte, stejně jako Jirka, výšku ISS nad zemským povrchem s využitím pouze těchto tří údajů, když víte, že dvě tělesa o hmotnostech m a M, ve vzájemné vzdálenosti r na sebe působí gravitační silou o velikosti:

$$F_g = \frac{GMm}{r^2},$$

kde G je konstanta, jejíž číselnou hodnotu si Jirka rovněž nepamatuje.

Tato úloha je v sérii čtvrtá, jde tedy o středně těžký fyzikální příklad. Zatímco třetí příklad lze vyřešit pouze se znalostmi ze školy, zde se účastníci často dozví něco nového a musí se nad úlohou hlouběji zamyslet.

ISS obíhá nad Zemí po kruhové dráze. Aby se těleso pohybovalo po kružnici musí na něj působit dostředivá síla o velikosti

$$F_d = \frac{mv^2}{r},$$

kde m je hmotnost pohybujícího se tělesa, v jeho rychlost a r poloměr kružnice. V tomto případě je dostředivou silou právě síla gravitační, což nám dává rovnici, která je zásadní pro vyřešení celé úlohy.

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

My však chceme vypočítat výšku nad zemským povrchem, která zatím v rovnici nefiguruje. Můžeme si však uvědomit, že poloměr kruhové trajektorie r, což je totéž jako vzdálenost mezi středem Země a stanicí, je součtem poloměru Země R a výškou stanice nad povrchem h:

$$r = R + h.$$

Další neznámou veličinou je rychlost pohybu stanice v. Pro její vyjádření využijeme znalost periody T a jako dráhu do základního vzorce pro rychlost použijeme délku oběžné dráhy, tedy délku kružnice o poloměru $R + h$:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi(R+h)}{T}.$$

A nyní už neznáme pouze hodnotu součinu GM. K jejímu výpočtu využijeme znalost tíhového zrychlení na povrchu Země a_g, pro které spojením druhého Newtonova zákona a Newtonova gravitačního zákona získáme vztah, z nějž můžeme právě hledanou hodnotu součinu vyjádřit:

$$a_g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow GM = a_g R^2.$$

Přichází velké finále, vše, co jsme odvodili, dáme dohromady a vyjádříme neznámou h:

$$\frac{4\pi^2(R+h)^2}{T^2(R+h)} = \frac{a_g R^2}{(R+h)^2},$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{a_g R^2 T^2}{4\pi^2}} - R.$$

Po dosazení číselných hodnot vychází, že ISS obíhá zhruba 422 km nad zemským povrchem, což velice dobře odpovídá realitě.

Můžeme si všimnout velmi zajímavé skutečnosti a to, že během řešení tohoto příkladu jsme mimo jiné odvodili třetí Keplerův zákon ve speciálním případě, kdy je pohyb kruhový. Stačí, když trochu upravíme výslednou rovnici a za součin GM nebudeme dosazovat, a vyjde jedna z podob třetího Keplerova zákona

$$\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Výraz na pravé straně rovnice bude pro všechny oběžnice daného tělesa (v tomto případě Země) stejný, proto se musí pro libovolná dvě obíhající tělesa rovnat i levé strany:

$$\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{{T_1}^2}{{r_1}^3}, \qquad \frac{{T_1}^2}{{r_1}^3} = \frac{{T_2}^2}{{r_2}^3}.$$

Samozřejmě, že pokud bychom tento zákon rovnou použili při řešení úlohy, ulehčili bychom si tím práci s řešením. Zároveň bychom se tím však ochudili o velkou část pochopení toho, jak pohyb těles v gravitačním poli funguje, a to by byla škoda.

Nebezpečný manévr (5. úloha 4. série)

Tom Cruise měl ve filmu Top Gun: Maverick za úkol připravit skupinu mladých vojáků na nebezpečnou misi. Součástí této mise bylo proletět ve stíhačce komplikovaným prostorem v omezeném čase. Let byl náročný i z důvodu velkých zrychlení, která Tom Cruise při letu pociťoval. Při jednom z manévrů napřed ve stíhačce stoupal pod úhlem 45° *a poté provedl vertikální otočku o* 90° *tak, že na konci tohoto manévru klesal pod úhlem* 45°*. Předpokládejte, že se během otočky stíhačka pohybovala po části kružnice rychlostí* $300\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ *a že celý manévr trval 8 sekund.*

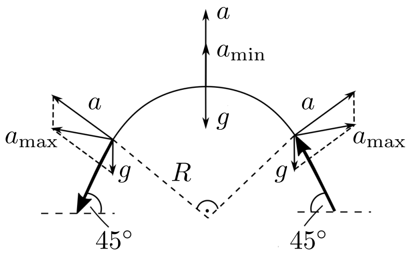
1. *Spočítejte velikost maximálního pocitového zrychlení, které Tom Cruise při tomto manévru pociťoval (manévrem rozumíme let stíhačky po zmíněné části kružnice za účelem změny směru letu).*
2. *Porovnejte ho s minimálním pocitovým zrychlením při manévru a určete poměr* a_{max-p}/a_{min-p}*.*

Bonus: Tom Cruise si následně uvědomil, že způsob, kterým otočku provádí (tedy let po části kružnice), není zdaleka optimální. Zkuste se zamyslet nad tím, jaké může být nejmenší možné maximální zrychlení letadla. Následně také určete, po jaké trajektorii se letadlo v takovém případě bude pohybovat. Je to zároveň i trajektorie s nejmenším maximálním pocitovým zrychlením?

Poznámka: Pocitovým zrychlením rozumíme tíhu, kterou naše tělo pociťuje. Tedy například pokud stojíme v klidu na zemi, tak cítíme zrychlení $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$*, i když naše tělo nezrychluje. Naopak astronauti na Mezinárodní vesmírné stanici se zrychleným pohybem pohybují, ale cítí stav beztíže.*

Pátá úloha je většinou ze všech nejnáročnější. K vyřešení vyžaduje hlubší pochopení problému a využití nadstandardních fyzikálních znalostí. Pro lepší orientaci bývá rozdělena do více podúloh, které zároveň navádí řešitele, jak k úloze přistupovat.

1. Nejprve si musíme uvědomit, kdy pociťuje pilot největší zrychlení. Během manévru se k tíhovému zrychlení g (vektorově) přičítá ještě zdánlivé odstředivé zrychlení a_o. Nejmenší zrychlení pilot pocítí v nejvyšším bodě trajektorie, kdy se tato zrychlení navzájem částečně odečtou. Největší naopak bude cítit v okamžik, kdy celý manévr začne – úhel mezi vektory zrychlení je v tomto okamžiku nejmenší a výslednice tak bude největší (viz obr. 2).



Obr. 2 Nebezpečný manévr (řešení)

Nejprve zjistíme velikost odstředivého zrychlení:

$$a_o = \frac{v^2}{R},$$

kde v je nám známá rychlost letounu a R je poloměr kružnice, po níž letadlo letí. Ten získáme díky tomu, že známe dráhu, kterou letadlo uletí během manévru, a zároveň víme, že jeho trajektorie je čtvrtinou kružnice:

$$s = vt = \frac{2\pi R}{4} \Rightarrow R = \frac{2vt}{\pi}.$$

Zkombinováním těchto dvou vztahů získáme výsledné odstředivé zrychlení:

$$a_o = \frac{\pi v}{2t}.$$

Nyní potřebujeme vektorově sečíst tíhové zrychlení g a odstředivé zrychlení a_o. Nejjednodušší by bylo využít kosinovou větu, kterou ovšem žáci druhých stupňů ZŠ většinou neznají. K výsledku lze však, dokonce názornějším způsobem, dospět i pouze s pomocí Pythagorovy věty. Odstředivé zrychlení a_o si můžeme rozdělit na horizontální složku a_x a vertikální složku a_y:

$$a_x = a_y = a_o \sin 45\ ^\circ = a_o \cos 45^\circ.$$

Celkové vertikální zrychlení se pak bude rovnat $a_y - g$, horizontální složka celkového zrychlení bude stále a_x. Tyto dvě složky už jen stačí sečíst pomocí zmiňované Pythagorovy věty:

$$\begin{aligned}a_{\mathrm{max-p}} &= \sqrt{(a_y - g)^2 + a_x^2} = \\ &= \sqrt{a_o^2 \sin^2(45°) - 2a_o g \sin(45°) + g^2 + a_o^2 \cos^2(45°)} = \\ &= \sqrt{a_o^2 + g^2 - \sqrt{2}a_o g} = \sqrt{\left(\frac{\pi v}{2t}\right)^2 + g^2 - \frac{\sqrt{2}\pi v}{2t} g}.\end{aligned}$$

Pro zadané hodnoty vychází maximální pocitové zrychlení při manévru $52{,}4\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

2. Největší zrychlení známe, potřebujeme tedy nalézt to nejmenší v průběhu letu. Jak jsme již zmínili, letec jej bude cítit v nejvyšším bodě trajektorie, kdy se od odstředivého zrychlení a_o odečte tíhové zrychlení g, tedy:

$$a_{\mathrm{min-p}} = a_o - g = \frac{\pi v}{2t} - g.$$

Hledaný poměr pak bude pro zadané veličiny vycházet:

$$\frac{a_{\mathrm{max-p}}}{a_{\mathrm{min-p}}} \doteq 1{,}07.$$

Bonus

Nejzajímavější částí na celé této úloze je bezpochyby její bonusová část. Na první pohled se jedná o dost složitou úlohu. Pokud bychom se pokusili řešit ji pouze pomocí matematických úvah, ke správnému výsledku bychom se dostali jen s opravdu velkými obtížemi. Znalosti základoškoláků by na to zdaleka nestačily. K úloze se ale dá přistupovat i trochu odlišným způsobem, fyzikální úvahou. Aby byl manévr co nejefektivnější, musí mít zrychlení směr změny rychlosti. Při letu po kružnici se tento směr mění, rozhodně to tedy nemůže být optimální trajektorie. Změna rychlosti má směr přímo dolů a velikost

$$\Delta v = 2v_y = 2v \cos 45° = \sqrt{2}v.$$

Nejefektivnější trajektorie tedy bude taková, při níž bude zrychlení směřovat přímo dolů. Maximální zrychlení musí být větší nebo rovno průměrnému zrychlení. Aby tedy bylo $a'_{\max}$ co nejmenší, musí se rovnat průměrnému zrychlení:

$$a'_{\max} = \frac{\Delta v}{t} \doteq 53\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Pohybuje-li se letadlo se zrychlením směřujícím přímo k zemi, jedná se o analogii k šikmému vrhu. Trajektorií tedy bude parabola.

Poslední otázkou je, jestli při tomto letu bude i maximální pocitové zrychlení to nejmenší možné. Opět se bude od zrychlení (které směřuje přímo k zemi) odečítat tíhové zrychlení, neboť má přesně opačný směr. Jelikož zrychlení letadla je nejmenší možné, bude i pocitové zrychlení nejmenší.

Ukázali jsme si, že řešení úvahou a slovním popisem nemusí být v některých případech na škodu, ba naopak nám může cestu ke správnému výsledku velmi usnadnit. Rozhodně to tedy není něco, čemu bychom se měli vyhýbat.

Kulička na provázku (5. úloha 6. série)

Jirka doma našel kuličku o hmotnosti $m = 50\ \mathrm{g}$ *zavěšenou na tenkém nehmotném provázku délky* $l = 50\ \mathrm{cm}$ *a začal s ní provádět pokusy.*

1. *Napřed kuličku roztočil takovým způsobem, že obíhala po kružnici v horizontální rovině s frekvencí* $f_1 = 1\ \mathrm{Hz}$*. O jaký úhel byl provázek vychýlený oproti svislému směru?*
2. *Nyní by chtěl kuličku roztočit tak, aby po kruhové dráze obíhala 2krát pomaleji, tedy s frekvencí* $f_2 = 0{,}5\ \mathrm{Hz}$*. Podaří se mu to? Pokud ano, tak o jaký úhel bude nyní provázek vychýlený? Pokud ne, vysvětlete, proč se mu to nepodaří a co se bude s kuličkou dít? (tj. nemusíte nic počítat).*

Jirka kuličku roztáčí tak, že ji vždy vychýlí o vhodný úhel a poté jí udělí vhodnou rychlost kolmou na směr odchýlení. V úloze zanedbejte odporové síly.

1. Na kuličku působí dvě síly – tíhová síla a síla, kterou působí na kuličku provázek, jejichž výslednicí je dostředivá síla, díky níž se kulička pohybuje po kružnici. Pro tíhovou sílu F_g platí

$$F_g = mg.$$

Hmotnost kuličky m i tíhové zrychlení g známe. O mnoho složitější nebude ani situace u dostředivé síly F_d, pro kterou při pohybu po kružnici platí vztah

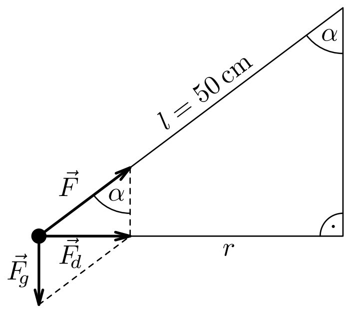
$$F_d = m\omega^2 r,$$

kde ω je úhlová rychlost, s níž se kulička otáčí, a r poloměr její kružnicové trajektorie. K vyjádření úhlové rychlosti využijeme zadanou frekvenci otáčení f_1:

$$\omega = 2\pi f_1.$$

Poloměr křivosti r můžeme vyjádřit z pravoúhlého trojúhelníku, ve kterém provázek s kuličkou tvoří přeponu a kolmice k zemi a poloměr r tvoří odvěsny (viz obr. 3). Úhel mezi lankem a kolmicí (tedy ten, jehož velikost chceme najít) označme α:

$$r = (\sin\alpha)l.$$



Obr. 3 Kulička na provázku (řešení)

Síly, které na kuličku působí, také vytváří pravoúhlý trojúhelník. Odvěsnami jsou tentokrát tíhová a dostředivá síla, přeponou je tahová síla lanka. Tahová síla lana a tíhová síla spolu také svírají úhel α. Pomocí sil F_g a F_d tedy můžeme vyjádřit $\tan\alpha$:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{F_d}{F_g} = \frac{m(2\pi f_1)^2(\sin\alpha)l}{mg}.$$

Upravením výrazu získáme finální vzorec, z nějž můžeme určit úhel α:

$$\cos\alpha = \frac{g}{(2\pi f_1)^2 l}.$$

Pro zadané hodnoty a $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ vychází $\alpha \doteq 60{,}2^\circ$.

2. Vycházíme ze stejných předpokladů, jako v první podúloze. Nemění se hmotnost kuličky, délka provázku ani trajektorie (kulička se stále má točit po kružnici), odlišná je pouze frekvence otáčení. Můžeme tedy použít i stejné rovnice, jako v předchozím případě.

Dosazením do finálního vzorce získáme:

$$\cos\alpha \doteq 2.$$

Funkce kosinus však nabývá maximální hodnoty 1. Jak je tedy možné, že výsledek vychází nesmyslně? Je pravděpodobné, že část řešitelů začne v tento moment hledat chybu ve svém postupu. V prvním případě sice finální vzorec funguje, nyní však vychází zdánlivé nesmysly, což je velmi matoucí.

Jestliže však není důvod hledat chybu v postupu, proč matematicky nevychází rozumné řešení? A je možné, že to je vlastně správně?

Pomoci s představou může pomoct reálná zkušenost. Asi každý někdy držel provázek s nějakým závažím, třeba klíči, a zkoušel s ním točit. Časem pak dojde ke zjištění, že při menších rychlostech se bude závaží pohybovat po menších kružnicích. Při zpomalení pod určitou limitní rychlost už vůbec nebude možné, aby se závaží pohybovalo po kružnici – závaží by se totiž muselo pohybovat tak pomalu, že působící dostředivá síla provázku, bude pro pohyb po kružnici příliš velká pro jakýkoliv úhel, a tak stáhne závaží blíže středu. Tím se ovšem rychlost závaží zvětší až se nakonec začne od středu opět vzdalovat. Celkem by tedy trajektorie závaží mohla přibližně připomínat elipsu.

Tímto způsobem se dá poměrně jednoduše vysvětlit na první pohled nesprávný číselný výsledek a ukázat, že někdy i zdánlivě nesmyslný výsledek je správný výsledek. I takováto informace je důležitým výstupem, který si naši účastníci mohou z řešení problémů odnést.

Tímto jsme představili jen lehkou ochutnávku z nepřeberného množství úloh, které Výfuk nabízí. Během roku zveřejňuje seminář několik sérií, v nichž kromě představených teoretických úloh najdeme i experimentální úlohu či krátký doprovodný studijní text o zajímavých fyzikálních tématech – *Výfučtení*. Žáci mají možnost zaslat svá řešení a získat kromě bodů do soutěže i cennou zpětnou vazbu, jak svá řešení zlepšit. Pokud vás seminář Výfuk zaujal, neváhejte navštívit jeho webové stránky vyfuk.org, kde naleznete spoustu dalších úloh i jiných informací.