Příloha časopisu
MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA
Ročník 32 (2023), číslo 2

Úlohy I. kola (domácí část) 73. ročníku MO (kategorie A, B, C)

KATEGORIE A

A–I–1

Na párty se sešlo 20 osob, z toho 10 chlapců a 10 dívek. Každému se líbí právě k osob opačného pohlaví. Je vždy možné vytvořit pár, v němž se oběma líbí ten druhý? Řešte a) pro $k = 5$, b) pro $k = 6$.

(*Josef Tkadlec*)

A–I–2

Z číslic 1 až 9 vytvoříme devítimístné číslo s navzájem různými číslicemi. Poté vypočítáme součet každé trojice sousedních číslic a těchto sedm součtů zapíšeme vzestupně. Rozhodněte, zda lze takto získat posloupnost

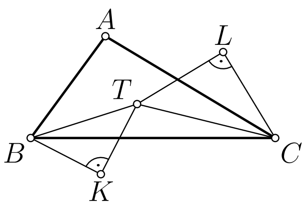
a) 11, 15, 16, 18, 19, 21, 22,

b) 11, 15, 16, 18, 19, 21, 23.

(*Patrik Bak*)

A–I–3

Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Nad úsečkami BT a CT jsou sestrojeny pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky BTK a CTL stejně jako na obrázku. Označme D střed strany BC a E střed úsečky KL. Určete všechny možné hodnoty poměru $|AT|/|DE|$.



(*Michal Rolínek*)

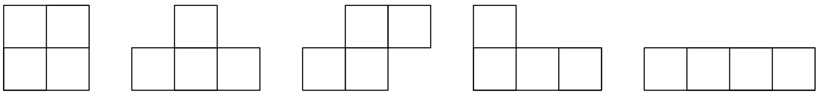
A–I–4

O lichém prvočísle p řekneme, že je *speciální*, pokud součet všech prvočísel menších než p je násobkem p. Existují dvě po sobě jdoucí prvočísla, která jsou speciální?

(*Jaroslav Zhouf*)

A–I–5

Rozhodněte, zda existuje neprázdná podmnožina políček tabulky 7×7 s následující vlastností: Pro každé z *tetramin*



lze tuto podmnožinu vyplnit bez překrývání výhradně jeho kopiemi. Jednotlivé kopie můžeme libovolně otáčet a překlápět.

(*Michal Rolínek*)

A–I–6

Pro reálná čísla a, b, c, d z intervalu $\langle 1, 2\rangle$ platí $(a+c)(b+d) = 8$. Dokažte, že

$$\frac{1}{a^2+b^2-1} + \frac{1}{b^2+c^2-1} + \frac{1}{c^2+d^2-1} + \frac{1}{d^2+a^2-1} \geq 1,$$

a určete, kdy nastane rovnost.

(*Zdeněk Pezlar*)

KATEGORIE B

B–I–1

Kolik neprázdných podmnožin množiny $\{0, 1, \ldots, 9\}$ má součet prvků dělitelný třemi?

(*Eliška Macáková*)

B–I–2

Pro reálná čísla a, b, c platí

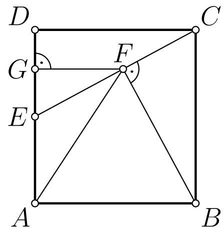
$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}.$$

Určete všechny možné hodnoty výrazu

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3}.$$

(*Michal Rolínek*)

B–I–3



Nechť E je střed strany AD pravoúhelníku $ABCD$. Předpokládejme, že pata F kolmice z vrcholu B k přímce CE leží uvnitř úsečky CE a označme G patu kolmice z bodu F ke straně AD. Dokažte, že přímka CE půlí úhel AFG.

(*Jaroslav Švrček*)

B–I–4

Rozhodněte, zda existuje pětice přirozených čísel
(i) a, a, a, a, b $(a \neq b)$,
(ii) a, a, b, b, c $(a \neq b \neq c \neq a)$,
v níž je každé z těchto čísel dělitelem součtu každých tří ze zbylých čtyř čísel.

(*Jaroslav Zhouf*)

B–I–5

V pravoúhlém trojúhelníku je poměr poloměru kružnice vepsané ku poloměru kružnice opsané $2 : 5$. Dokažte, že délka jedné z jeho stran je aritmetickým průměrem délek zbylých dvou stran.

(*Mária Dományová*)

B–I–6

Rozhodněte, zda lze čtvercovou tabulku 4×4 vyplnit navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 16 tak, že v každém řádku i každém sloupci existuje číslo, jehož sedminásobek je součtem zbylých tří čísel.

(*Jaromír Šimša*)

KATEGORIE C

C–I–1

Existuje deset po sobě jdoucích přirozených čísel, která jsou po řadě dělitelná čísly 9, 7, 5, 3, 1, 1, 3, 5, 7, 9?

(*Jaroslav Zhouf*)

C–I–2

Pro střed M přepony AC pravoúhlého trojúhelníku ABC platí

$$|BC| = |CM|.$$

Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABC a ABM mají stejné poloměry.

(*Michal Pecho*)

C–I–3

Uvažujme 20 výroků:

„Mám právě jednu sestru.“	„Mám právě jednoho bratra.“
„Mám právě dvě sestry.“	„Mám právě dva bratry.“
$\vdots$	$\vdots$
„Mám právě deset sester.“	„Mám právě deset bratrů.“

a) Každý ze čtyř sourozenců pronesl jiný z těchto 20 výroků. Je možné, že všichni čtyři měli pravdu?

b) Najděte největší přirozené číslo n takové, že každý z n sourozenců může pronést jiný z těchto 20 výroků a mít pravdu.[1]

(*Josef Tkadlec*)

C–I–4

Kolik uspořádaných čtveřic přirozených čísel (a, b, c, d) se součtem 100 splňuje rovnice

$$(a+b)(c+d) = (b+c)(a+d) = (a+c)(b+d)?$$

(*Patrik Bak*)

C–I–5

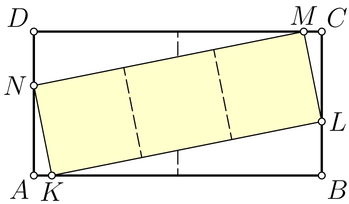
Na tabuli jsou napsána čísla 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. V každém kroku čísla a, b, c napsaná na tabuli smažeme a nahradíme je součiny ab, bc, ca. Zjistěte, zda po několika krocích bude znovu některé z čísel napsaných na tabuli přirozené.

(*Jaroslav Zhouf*)

C–I–6

Je dán obdélník $ABCD$, kde

$$|AB| : |BC| = 2 : 1.$$



Na jeho stranách AB, BC, CD, DA jsou dány po řadě body K, L, M, N tak, že $KLMN$ je obdélník, v němž

$$|KL| : |LM| = 3 : 1.$$

Vypočtěte poměr obsahů obdélníků $ABCD$ a $KLMN$.

(*Josef Tkadlec*)

[1] Všichni sourozenci mají stejné rodiče.