MATEMATIKA

O jedné diofantovské rovnici

TOMÁŠ RIEMEL

Fakulta strojní, VŠB-TU Ostrava

S rovnicemi o více neznámých, které řešíme v oboru celých čísel – tzv. *diofantovskými*, se žáci mohou setkat např. při řešení některých slovních úloh již na základní škole. V tomto příspěvku se budeme zabývat kvadratickou diofantovskou rovnicí

$$x^2 + y^2 = n, \tag{1}$$

kde x, y jsou celočíselné neznámé a n je dané celé nezáporné číslo. Z pohledu analytické geometrie se jedná o určení všech *mřížových bodů* (tj. bodů s oběma celočíselnými souřadnicemi x, y), které leží na kružnici se středem v počátku kartézské soustavy souřadnic a poloměrem $\sqrt{n}$.

Cílem příspěvku je prezentace tzv. *Gaussových celých čísel* při řešení problémů uvedeného typu. Od čtenáře přitom očekáváme základní znalosti z oblasti komplexních čísel.

Přestože výše uvedená problematika není vysloveně školská, úlohy podobného typu se poměrně často vyskytují v matematických soutěžích. Článek je tudíž vhodný především pro učitele, kteří se věnují péči o matematicky talentované žáky, žákům samotným a dalším zájemcům o tuto problematiku.

Pro malá (celá nezáporná) n lze při řešení dané úlohy postupovat užitím metody nerovností a odhadů, kterou prezentujeme při řešení následující snadné úlohy.

Příklad 1

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$x^2 + y^2 = 20.$$

Řešení. Pokud je nějaká dvojice celých čísel (m, n) řešením této úlohy, je jejím řešením také dvojice (n, m). Dalšími řešeními jsou také dvojice $(-m, n)$, $(m, -n)$, $(-m, -n)$, $(-n, m)$, $(n, -m)$, $(-n, -m)$.

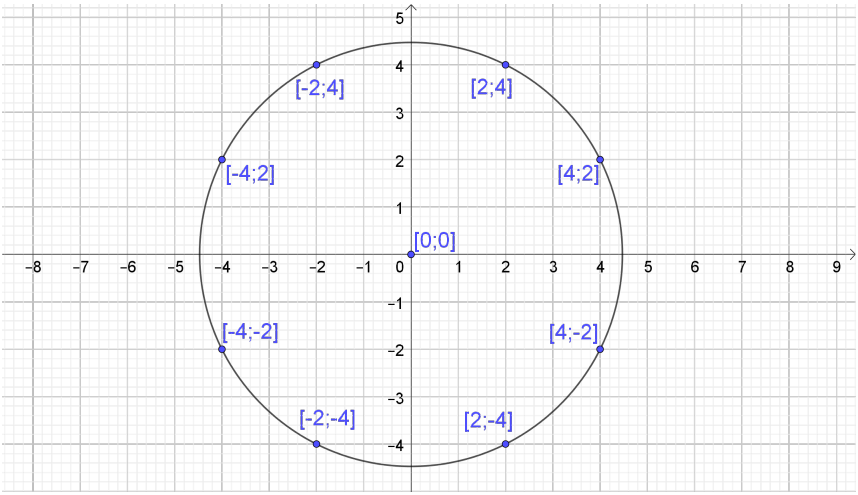
Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $x^2 \leq y^2$. Pak

$$0 \leq 2x^2 \leq x^2 + y^2 = 20, \tag{2}$$

odkud plyne $x^2 \in \{0, 1, 4, 9\}$, a tedy x je nutně celé číslo, pro něž platí $-3 \leq x \leq 3$. Dosazením těchto hodnot za x^2 v dané úloze získáme postupně $y^2 = 20$, $y^2 = 19$, $y^2 = 16$, $y^2 = 11$.

Celočíselná řešení přitom dostáváme pouze v případě, kdy $y^2 = 16$, tj. $y = \pm 4$.

Závěr: Daná úloha má právě 8 řešení, a to $(x, y) \in \{(\pm 2; \pm 4), (\pm 4; \pm 2)\}$.



Obr. 1 K řešení příkladu 1

Z řešení uvedeného příkladu je patrné, že pro velká přirozená čísla n není metoda nerovností a odhadů dostatečně efektivní. V takových případech je vhodné použít tzv. *Gaussova celá čísla.*

Komplexní čísla $\alpha = x + y\mathrm{i}$, kde x, y jsou celá čísla, se nazývají *Gaussova celá čísla.* Množina všech Gaussových celých čísel, kterou označujeme $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, je rozšířením množiny celých čísel (tj. platí $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$). Gaussovo celé číslo α,

pro něž existuje $\tau \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ takové, že $\alpha \cdot \tau = 1$, nazveme *jednotkou*. Norma $N(\alpha)$ Gaussova celého čísla $\alpha = x + y\mathrm{i}$ je definována předpisem

$$N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2 = x^2 + y^2,$$

kde $\overline{\alpha} = x - y\mathrm{i}$ je komplexně sdružené číslo s α. Má přitom následující vlastnosti:

a) Pro libovolná dvě Gaussova celá čísla α, β platí $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.
b) Gaussovo celé číslo je jednotka, právě když $N(\alpha) = 1$, přičemž jednotkami v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ jsou pouze ± 1 a $\pm\mathrm{i}$.

Lemma 1
Je-li zbytek při dělení přirozeného čísla n čtyřmi roven 3, pak rovnice $x^2 + y^2 = n$ nemá řešení v oboru celých čísel.

Důkaz. Libovolné nezáporné celé číslo p, které je dělitelné dvěma, lze zapsat ve tvaru $p = 2\ell$, kde ℓ je vhodné nezáporné celé číslo. Proto $p^2 = (2\ell)^2 = 4\ell^2$ je dělitelné čtyřmi. Podobně každé liché číslo q lze zapsat ve tvaru $q = 2r + 1$, kde r je vhodné nezáporné celé číslo. Pak $q^2 = (2r + 1)^2 = 4r^2 + 4r + 1$ dává po dělení čtyřmi zbytek 1. Výraz $x^2 + y^2$ tedy může nabývat po dělení čtyřmi pouze zbytků 0, 1 a 2, nikoliv však 3. Tím je důkaz ukončen.

Z lemmatu 1 bezprostředně plyne, že například diofantovská rovnice $x^2 + y^2 = 115$ nemá žádné celočíselné řešení, neboť číslo 115 dává při dělení čtyřmi zbytek 3.

Následující větu uvedeme pouze informativně (bez důkazu). Ten lze dohledat např. v [4].

Věta 1
Přirozené číslo n lze vyjádřit jako součet dvou druhých mocnin celých čísel ($n = x^2 + y^2$), právě když n je normou Gaussova celého čísla, tj. $n = N(x + y\mathrm{i})$.

Podle věty 1 lze problém o součtu druhých mocnin celých čísel přeformulovat na úlohu o hledání všech Gaussových celých čísel α splňujících vlastnost $N(\alpha) = n$.

Z aritmetiky přirozených čísel je známo, že každé přirozené číslo $n \geq 2$ lze vyjádřit jako součin prvočísel. Stručnou odpověď na otázku, která prvočísla jsou normami Gaussových celých čísel, poskytuje následující lemma.

Lemma 2

a) Platí $2 = N(1 \pm \mathrm{i})$.

b) Pro každé prvočíslo p dávající po dělení čtyřmi zbytek 1 lze nalézt Gaussovo celé číslo α splňující $p = N(\alpha)$.

c) Pro každé prvočíslo p dávající zbytek 3 po dělení čtyřmi, neexistuje Gaussovo celé číslo β splňující $p = N(\beta)$.

Důkaz lze nalézt např. v [3].

Uvědomme si, že Gaussova celá čísla, která jsou komplexně sdružená, mají stejnou normu a dále, že pro každé prvočíslo p platí $p^2 = N(p)$.

Nenulové Gaussovo celé číslo α, které není jednotkou, nazveme *Gaussovým prvočíslem*, pokud platí následující podmínka: Jestliže $\alpha = \tau \cdot \psi$, kde τ, $\psi \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, pak buď τ, nebo ψ je jednotka. Jinak řečeno, Gaussova prvočísla jsou právě ta Gaussova celá čísla, která nelze v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ netriviálně rozložit na součin dvou Gaussových celých čísel.

Některá prvočísla jsou v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ rozložitelná, jiná nikoliv. Např. pro prvočíslo 5 platí $5 = (2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})$, tudíž 5 není Gaussovým prvočíslem. Naopak prvočíslo 3 je v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ nerozložitelné, a tedy je zároveň Gaussovým prvočíslem. Podobně jako v aritmetice celých čísel lze každé nenulové Gaussovo celé číslo, které není jednotkou, jednoznačně (až na pořadí, násobení jednotkami a komplexně sdruženými čísly) vyjádřit jako součin několika Gaussových prvočísel.

Věta 2 (Eulerova)
Číslo ve tvaru $4\ell+1$, kde ℓ je přirozené číslo, je prvočíslem, právě když jej lze jednoznačně vyjádřit jako součet dvou druhých mocnin nesoudělných přirozených čísel.

Následující věta dává vyčerpávající odpověď na otázku řešitelnosti a celkového počtu řešení původního problému (1).

Věta 3

a) Přirozené číslo n lze vyjádřit jako součet dvou druhých mocnin celých čísel ($n = x^2 + y^2$), právě když prvočíselný rozklad čísla n má tvar

$$n = 2^a p_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{b_k} r_1^{2c_1} \cdot \ldots \cdot r_l^{2c_l},$$

kde a, b_i, c_j jsou nezáporná celá čísla, každé p_i dává zbytek 1 po dělení čtyřmi a každé r_j dává zbytek 3 po dělení čtyřmi.

b) Nechť $t = (b_1+1)\cdot\ldots\cdot(b_k+1)$. Pak je počet všech různých vyjádření čísla n ve tvaru součtu dvou druhých mocnin celých čísel s ohledem na pořadí a znaménka roven $4t$. Bez ohledu na pořadí prvků a znaménka je tento počet roven $\frac{1}{2}t$ pro t sudé a $\frac{1}{2}(t+1)$ pro t liché.

S výše uvedenými výsledky včetně důkazů se může čtenář detailněji seznámit např. v [2, 3, 4, 5].

Jiné řešení příkladu 1. Platí $20 = 2^2 \cdot 5$, $2 = N(1 \pm \mathrm{i})$ a prvočíslo 5 dává po dělení čtyřmi zbytek 1, přičemž $5 = N(2 \pm \mathrm{i})$. Tedy

$$20 = 2^2 \cdot 5 = N(k(1 \pm \mathrm{i})^2(2 \pm \mathrm{i})) = N(x + y\mathrm{i}) = x^2 + y^2,$$

kde k je jednotka v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, tj. $k = \pm 1$ nebo $k = \pm\mathrm{i}$. Musíme tedy vyřešit všechny rovnice

$$x + y\mathrm{i} = k(1 \pm \mathrm{i})^2(2 \pm \mathrm{i}).$$

Z věty 3 plyne, že daná úloha má celkem 8 řešení. Bez ohledu na pořadí prvků a znaménka obdržíme dle věty 3 pouze 1 možnost. Stačí tedy uvažovat jedinou rovnici, např.

$$x + y\mathrm{i} = (1 + \mathrm{i})^2(2 + \mathrm{i}) = 2\mathrm{i}(2 + \mathrm{i}) = -2 + 4\mathrm{i},$$

odkud $x = -2$, $y = 4$. Ostatní řešení získáme záměnou x, y a znamének.

Z řešení následujícího příkladu je zřejmé výhodnější použití metody Gaussových celých čísel ve srovnání s metodou nerovností a odhadů.

Příklad 2

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$x^2 + y^2 = 2\,009.$$

Řešení. Uvažujme kanonický rozklad čísla 2 009 na prvočísla, tj. platí $2\,009 = 7^2 \cdot 41$. Z lemmatu 2 plyne, že existuje Gaussovo celé číslo, pro které je prvočíslo 41 normou. Např. $41 = N(5 \pm 4\mathrm{i})$. Pro prvočíslo 7 takové Gaussovo celé číslo neexistuje, neboť 7 dává zbytek 3 po dělení čtyřmi. Prvočíslo 7 se ovšem vyskytuje v prvočíselném rozkladu v druhé mocnině, proto $7^2 = N(7)$. Platí tedy

$$2\,009 = 7^2 \cdot 41 = N(7k(5 \pm 4\mathrm{i})) = N(x + y\mathrm{i}) = x^2 + y^2,$$

kde k je jednotka v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, tj. $k = \pm 1$ nebo $k = \pm\mathrm{i}$. Hledáme proto řešení všech rovnic $x + y\mathrm{i} = 7k(5 \pm 4\mathrm{i})$. Daná úloha má podle věty 3 právě 8 řešení.

Stačí přitom řešit pouze rovnici $x+y\mathrm{i} = 7(5+4\mathrm{i}) = 35+28\mathrm{i}$, odtud $x = 35$ a $y = 28$. Zbývající řešení získáme záměnou x, y a změnou znamének.

Závěr: Všechna řešení dané úlohy jsou $(x, y) \in \{(\pm 35; \pm 28), (\pm 28; \pm 35)\}$.

Následující příklad lze (po užití substituce) řešit opět metodou Gaussových celých čísel.

Příklad 3
V oboru celých čísel řešte rovnici

$$x^2 + y^2 = 2\,006(x - y).$$

Řešení. Ze zadání snadno vidíme, že levá strana rovnice je součtem dvou celých nezáporných čísel, tedy i pravá strana musí být celé nezáporné číslo. Jelikož 2 006 je přirozené číslo, musí platit $x \geq y$. Dále si všimněme, že uspořádaná dvojice $(x, y) = (0; 0)$ je řešením úlohy. Po snadné úpravě obdržíme danou rovnici ve tvaru

$$(x - 1\,003)^2 + (y + 1\,003)^2 = 2\,012\,018.$$

Užitím substituce $z = x - 1\,003$, $u = y + 1\,003$ obdržíme po úpravě modifikovanou úlohu (1)

$$z^2 + u^2 = 2\,012\,018,$$

kde $2\,012\,018 = 2 \cdot 17^2 \cdot 59^2$. Platí $2 = N(1 \pm \mathrm{i})$. Podle lemmatu 2 existuje Gaussovo celé číslo s normou 17. Například $17 = N(4 \pm \mathrm{i})$. Dle téhož lemmatu neexistuje Gaussovo celé číslo s normou 59, ovšem prvočíslo 59 se vyskytuje v daném rozkladu v druhé mocnině, přičemž $59^2 = N(59)$. Platí tedy

$$2\,012\,018 = N(59k(1 \pm \mathrm{i})(4 \pm \mathrm{i})^2) = N(z + u\mathrm{i}) = z^2 + u^2,$$

kde k je jednotka v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Na základě věty 3 má úloha celkem $4 \cdot 3 = 12$ celočíselných řešení, přičemž bez ohledu na pořadí prvků a znaménka stačí vyřešit následující dvě rovnice o neznámých z a u:

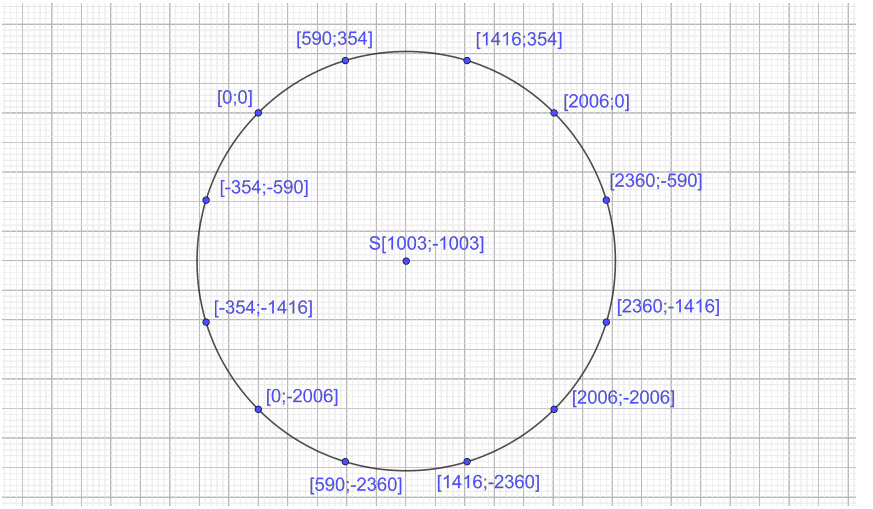
a) $z + u\mathrm{i} = 59(1 + \mathrm{i})(4 + \mathrm{i})^2 = 413 + 1\,357\mathrm{i}$,

b) $z + u\mathrm{i} = 59(1 + \mathrm{i})(4 + \mathrm{i})(4 - \mathrm{i}) = 1\,003 + 1\,003\mathrm{i}$.

Další řešení získáme záměnou složek z, u a změnou znamének. Obdržíme tak celkem 12 řešení ve tvaru $(z,u) \in \{(\pm 413; \pm 1\,357),\ (\pm 1\,003; \pm 1\,003),\ (\pm 1\,357; \pm 413)\}$. Dosazením do vztahů $z = x - 1\,003$ a $u = y + 1\,003$ získáme řešení původní úlohy.

Závěr: Úloha má právě 12 řešení a to dvojice $(x,y) \in \{(-354; -1\,416),\ (-354; -590),\ (0; -2\,006),\ (0; 0),\ (590; -2\,360),\ (590; 354),\ (1\,416; -2\,360),\ (1\,416; 354),\ (2\,006; -2\,006),\ (2\,006; 0),\ (2\,360; -1\,416),\ (2\,360; -590)\}$.

Řešením úlohy jsou z grafického hlediska mřížové body na kružnici, která nemá střed v počátku, viz obr. 2.



Obr. 2 K řešení příkladu 3

Příklad 4

Určete všechny dvojice (x,y) celých čísel, které splňují rovnici

$$x^2 + y^2 = 21.$$

Řešení. Z prvočíselného rozkladu $21 = 3 \cdot 7$ zjistíme, že pro prvočísla 3 a 7 neexistují Gaussova celá čísla, jejichž normami by byla daná prvočísla. Jelikož se 3 (ani 7) nevyskytuje v sudé mocnině v prvočíselném rozkladu 21, nemá daný příklad podle věty 3 celočíselné řešení. Tuto skutečnost lze snadno ověřit i pomocí metody nerovností a odhadů.

Závěr: Daná úloha *nemá řešení* v oboru celých čísel.

Příklad 5

Určete všechny dvojice (x, y) přirozených čísel, pro něž platí

$$x^2 + y^2 = 1\,105.$$

Řešení. V prvním kroku vytvoříme prvočíselný rozklad čísla 1 105, tj. $1\,105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$. Z lemmatu 2 plyne, že pro prvočísla 5, 13 a 17 existují Gaussova celá čísla, která jsou jejich normami, kde $5 = N(2 \pm \mathrm{i})$, $13 = N(3 \pm 2\mathrm{i})$, $17 = N(4 \pm \mathrm{i})$. Platí tedy

$$1\,105 = 5 \cdot 13 \cdot 17 = N(k(2 \pm \mathrm{i})(3 \pm 2\mathrm{i})(4 \pm \mathrm{i})) = N(x + y\mathrm{i}) = x^2 + y^2,$$

kde k je jednotka v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, tj. $k = \pm 1$ nebo $k = \pm\mathrm{i}$. Hledáme tedy řešení všech rovnic $x + y\mathrm{i} = k(2 \pm \mathrm{i})(3 \pm 2\mathrm{i})(4 \pm \mathrm{i})$. Celkový počet řešení dle věty 3 je $4 \cdot 2^3 = 32$. Není ovšem nutné řešit všechny rovnice daného typu. Stačí vyřešit pouze čtyři případy:

a) $x + y\mathrm{i} = (2 + \mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})(4 + \mathrm{i}) = 9 + 32\mathrm{i}$,
b) $x + y\mathrm{i} = (2 - \mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})(4 + \mathrm{i}) = 31 + 12\mathrm{i}$,
c) $x + y\mathrm{i} = (2 + \mathrm{i})(3 - 2\mathrm{i})(4 + \mathrm{i}) = 33 + 4\mathrm{i}$,
d) $x + y\mathrm{i} = (2 + \mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})(4 - \mathrm{i}) = 23 + 24\mathrm{i}$.

Odtud dostaneme následující čtyři řešení $(x, y) \in \{(9; 32), (31; 12), (33; 4), (23; 24)\}$. Další řešení získáme záměnou x, y a změnou znamének.

Závěr: Všech 32 celočíselných řešení dané úlohy lze zapsat ve tvaru $(x, y) \in \in \{(\pm 4; \pm 33), (\pm 9; \pm 32), (\pm 12; \pm 31), (\pm 23; \pm 24), (\pm 24; \pm 23), (\pm 31; \pm 12), (\pm 32; \pm 9), (\pm 33; \pm 4)\}$.

Závěrem uvádíme úlohu, kterou lze řešit kombinací metody nerovností a odhadů s metodou Gaussových celých čísel.

Příklad 6

Určete počet všech celočíselných řešení rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 = 34.$$

Řešení. Zde se jedná o nalezení všech mřížových bodů v prostoru, které leží na kulové ploše se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem $\sqrt{34}$.

Dále si všimněme, že záměnou neznámých se daná úloha nezmění. Bez újmy na obecnosti lze tedy předpokládat, že x^2 je nejmenší z hodnot x^2, y^2, z^2, neboli $x^2 \leq y^2$ a $x^2 \leq z^2$. K řešení úlohy využijeme v prvním kroku metodu nerovností a odhadů a posléze metodu Gaussových celých čísel. Podle výše uvedeného předpokladu tak platí

$$0 \leq 3x^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 = 34.$$

Odtud plyne $x^2 \leq 11$, neboli $x \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$. V dalším kroku postupně rozebereme tyto 4 možnosti s použitím metody Gaussových celých čísel:

a) Pro $x = 0$ obdržíme ze zadání úlohy rovnici ve tvaru $y^2 + z^2 = 34$. Prvočíselný rozklad čísla 34 je roven $2 \cdot 17$. Jelikož prvočíslo 17 dává zbytek 1 po dělení čtyřmi, pak podle lemmatu 2 existuje Gaussovo celé číslo, pro které je 17 normou, například $N(4 \pm \mathrm{i})$. Pro číslo 2 platí $2 = N(1 \pm \mathrm{i})$. Platí tedy

$$34 = N(k(1 \pm \mathrm{i})(4 \pm \mathrm{i})) = N(y + z\mathrm{i}) = y^2 + z^2,$$

kde k je jednotka v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Hledáme proto celočíselná řešení všech rovnic

$$y + z\mathrm{i} = k(1 \pm \mathrm{i})(4 \pm \mathrm{i}).$$

Na základě věty 3 stačí vyřešit pouze rovnici

$$y + z\mathrm{i} = (1 + \mathrm{i})(4 + \mathrm{i}) = 3 + 5\mathrm{i},$$

z níž ihned plyne $(y, z) = (3; 5)$. Zbývající řešení získáme záměnou y, z a znamének. Našli jsme tak trojice $(x, y, z) \in \{(0; \pm 3; \pm 5), (0; \pm 5; \pm 3)\}$, které jsou řešením dané rovnice.

b) Je-li $x = \pm 1$, pak získáme rovnici $y^2 + z^2 = 33$. Tato rovnice nemá tedy na základě věty 3 celočíselné řešení, neboť v prvočíselném rozkladu čísla 33 se prvočíslo 3 vyskytuje v liché mocnině.

c) Je-li $x = \pm 2$, dostaneme rovnici $y^2 + z^2 = 30$. Ta opět nemá celočíselné řešení na základě věty 3, protože v rozkladu čísla 30 na prvočísla se prvočíslo 3 vyskytuje v liché mocnině.

d) Pro $x = \pm 3$ obdržíme rovnici $y^2 + z^2 = 25$. Prvočíselný rozklad čísla 25 je roven 5^2. Na základě lemmatu 2 existuje Gaussovo celé číslo s normou 5, např. $N(2 \pm \mathrm{i}) = 5$. Platí tedy

$$25 = N(k(2 \pm \mathrm{i})^2) = N(y + z\mathrm{i}) = y^2 + z^2,$$

kde k je jednotka v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Podle věty 3 stačí určit y a z v následujících rovnicích:

$$y + z\mathrm{i} = (2 + \mathrm{i})(2 + \mathrm{i}) = 3 + 4\mathrm{i}$$

a

$$y + z\mathrm{i} = (2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i}) = 5.$$

Jejich řešením jsou dvojice $(y, z) = (3; 4)$ a $(y, z) = (5; 0)$. Dvojice $(5; 0)$ však nevyhovuje podmínkám úlohy. Zbývající řešení obdržíme záměnou y, z a změnou znamének.

Řešeními dané rovnice jsou pouze následující trojice:
$(x, y, z) \in \{(\pm 3; \pm 3; \pm 4), (\pm 3; \pm 4; \pm 3)\}$.

Bez užití předpokladu x^2 je nejmenší (jedna z nejmenších hodnot) lze celkový počet řešení dané úlohy stanovit pomocí počtu všech permutací složek řešení. V uspořádané trojici $(x, y, z) = (0; \pm 3; \pm 5)$ lze 0 umístit na tři pozice (vzhledem k symetrii) a u ostatních prvků měnit znaménka $2^2 = 4$ způsoby, z čehož dostáváme $3 \cdot 4 = 12$ možností. Dalších 12 možností získáme analogicky z trojice $(x, y, z) = (0; \pm 5; \pm 3)$. Dále si uvědomme, že v trojici $(x, y, z) = (\pm 3; \pm 3; \pm 4)$ lze číslo ± 4 umístit na tři pozice a zároveň změnit znaménka u všech prvků celkově $2^3 = 8$ způsoby. Obdržíme tak $3 \cdot 8 = 24$ řešení.

Závěr: Existuje tedy právě 48 řešení dané úlohy viz předchozí odstavec.

Literatura

[1] *Andreescu, T., Andrica, D., Feng, Z.*: 104 Number Theory Problems. Birkhäuser, Boston, 2007.

[2] *Halaš, R.*: Úvod do teorie čísel. Vydavatelství Univerzity Palackého, Olomouc, 2014.

[3] *Conrad, K.*: The Gaussian integers. [online] [cit. 2023-02-17]

[4] *Donaldson, N.*: Gaussian integers and Rings of Algebraic Integers. University of California, Irvine [online] [cit. 2023-02-17].

[5] *Krásenský, K.*: Gaussova prvočísla. MKS archiv [online] [cit. 2023-02-17].

[6] Math Prize for Girls 2010, Problem 3. [online] [cit. 2023-02-17].