Tři speciální body ležící na jedné přímce V

JAROSLAV ZHOUF

FIT ČVUT, Praha

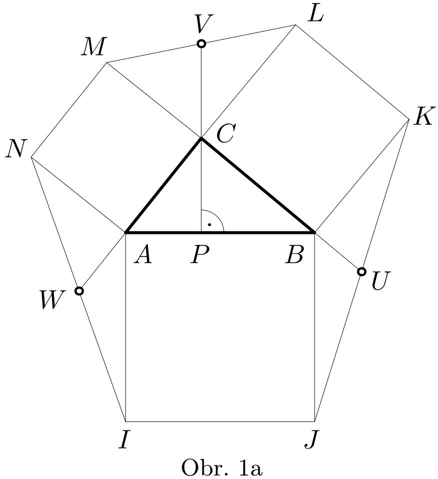
Článek je pokračováním tématu o zajímavých trojicích bodů, které leží na jedné přímce. Nyní uvádíme úlohy, v nichž se využívá geometrických zobrazení a také vztahy mezi velikostmi úhlů mezi některými přímkami v trojúhelnících a čtyřúhelnících. Také se zde často využívá vztah mezi obvodovým a středovým úhlem příslušné tětivy kružnice.

Příklad 1

Na obr. 1a je znázorněn pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Nad jeho stranami jsou vně trojúhelníku sestrojeny čtverce $IJBA$, $KLCB$, $MNAC$. Středy úseček JK, LM, NI postupně označme U, V, W a patu výšky z vrcholu C ke straně AB označme P. Dokažte, že na jedné přímce leží body

a) C, B, U (analogicky body C, A, W),

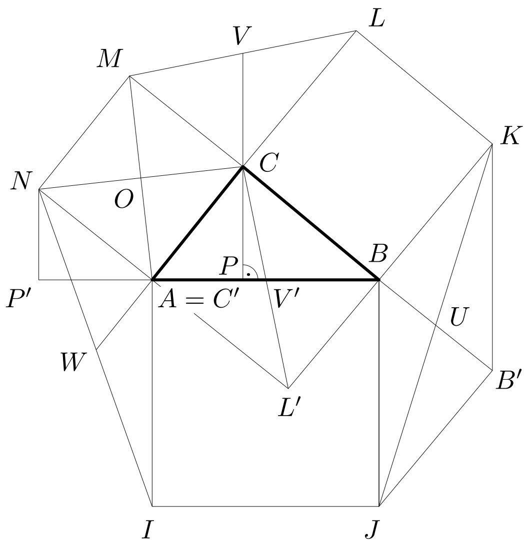
b) V, C, P.



Obr. 1a

Řešení.

a) Nechť bod B' je obrazem bodu B ve středové souměrnosti se středem U. Odtud plyne, že čtyřúhelník $JB'KB$ je rovnoběžník (obr. 1b).



Obr. 1b

Z rovností $|\sphericalangle BKB'| + |\sphericalangle JBK| = 180°$ a $|\sphericalangle JBK| + |\sphericalangle ABC| = 180°$ plyne, že $|\sphericalangle BKB'| = |\sphericalangle ABC|$. Dále $|B'K| = |JB| = |AB|$, $|BK| = |BC|$. Podle věty *sus* jsou tedy trojúhelníky $B'KB$ a ABC shodné. Proto je i $|\sphericalangle B'BK| = 90°$.

Z toho plyne závěr, že body C, B, U leží na jedné přímce.

b) Zde využijeme otočení se středem O čtverce $ACMN$ o $-90°$. V tomto případě se trojúhelník ALM zobrazí na trojúhelník $NL'C$, trojúhelník APC se zobrazí na trojúhelník $NP'A$ a trojúhelník MCV se zobrazí na trojúhelník CAV'. Odtud plyne, že body V', C', P', a tedy i body V, C, P leží na jedné přímce. Tím je důkaz hotov.

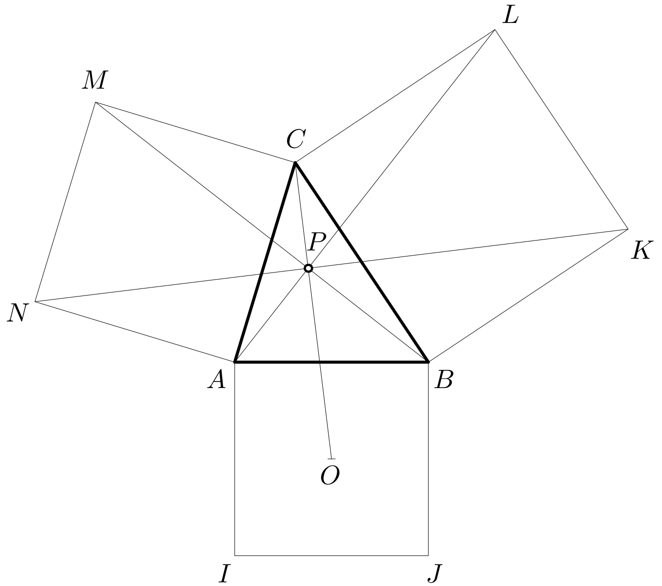
Příklad 2

Na obr. 2 je znázorněn trojúhelník ABC. Nad jeho stranami jsou vně trojúhelníku sestrojeny čtverce $IJBA$, $KLCB$, $MNAC$. Úsečky AL a BM se protínají v bodě P. Dokažte, že na jedné přímce leží body

a) N, P, K,

b) C, P, O, kde O je střed čtverce $IJBA$.

Poznámka. Z důkazu vyplývá, že všech osm úhlů, a to BPK, KPL, LPC, CPM, MPN, NPA, APO, OPB, má velikost 45°.



Obr. 2

Řešení. Důkaz provedeme pro ostroúhlý trojúhelník ABC, tvrzení ale platí pro jakýkoli trojúhelník.

a) Úsečka BM se v otočení se středem v bodě C o úhel o velikosti 90° zobrazí na úsečku LA, proto úsečky BM a LA jsou vzájemně kolmé. Sestrojíme-li tedy kružnici s průměrem AM, prochází tato kružnice také body C, P, N. Díky tomu mají obvodové úhly NCM a NPM nad tětivou MN kružnice velikost 45°.

Analogicky pro kružnici s průměrem BL platí, že velikost úhlu KPL je 45°.

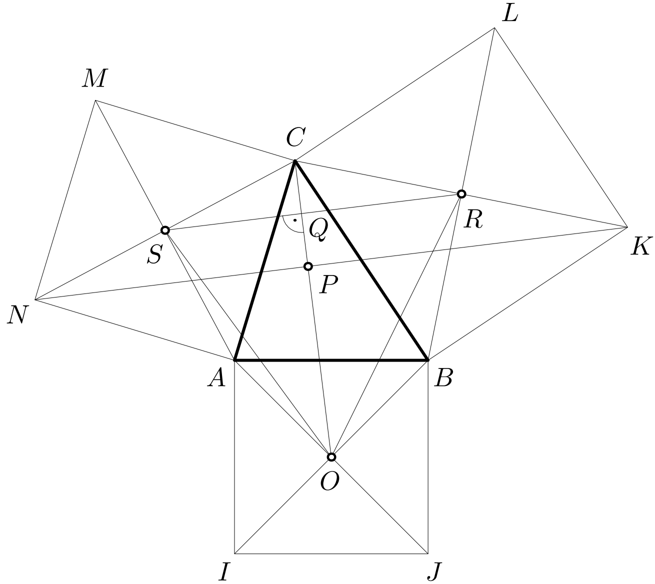
Takže dostáváme, že součet velikostí úhlů NPM, MPL, LPK je 180°, což znamená že body N, P, K leží na jedné přímce.

b) Úhly APB a AOB jsou pravé, proto body A, O, B, P leží na kružnici s průměrem AB. A jelikož mají úhly ABO, BAO velikost 45°, mají díky vlastnosti obvodových úhlů takovou velikost i úhly APO, BPO. To znamená, že úsečka PO půlí úhel APB. A jelikož úsečka CP půlí úhel MCL, leží body C, P, O na jedné přímce.

Příklad 3

Na obr. 3 je znázorněn trojúhelník ABC. Nad jeho stranami jsou vně sestrojeny čtverce $IJBA$, $KLCB$, $MNAC$, jejich středy jsou postupně O, R, S. Patu výšky z bodu O na přímku RS označme Q. Dokažte, že body O, Q, C leží na jedné přímce.

Poznámka. Příklad ukazuje, že na přímkách OC, RA, SB leží výšky trojúhelníku ORS.



Obr. 3

Řešení. Trojúhelníky CSR a CNK jsou stejnolehlé se středem stejnolehlosti C, proto jsou přímky SR a NK rovnoběžné.

V příkladu 2 je dokázáno, že přímka OC je kolmá na přímku NK, proto je přímka OC kolmá i na přímku SR, a proto body O, Q, C leží na jedné přímce.

Příklad 4 (Fermatův bod)

Na obr. 4 je trojúhelník ABC, jehož všechny vnitřní úhly jsou menší než $120°$ a vně nad jeho stranami jsou sestrojeny rovnostranné trojúhelníky KBA, LCB, MAC. Označme F průsečík přímek AL a BM. Dokažte, že body K, F, C leží na jedné přímce.

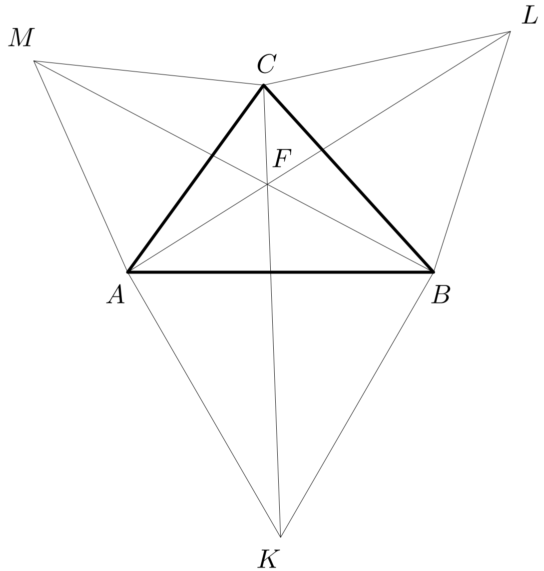
Poznámka.

1. Úloha může také znít: Dokažte, že se přímky KC, LA, MB protínají v jednom bodě.

2. Z následujícího důkazu je též patrné, že úsečky KC, LA, MB jsou stejně dlouhé.

3. A z důkazu je též patrné, že každé dvě z přímek KC, LA, MB svítají úhel o velikosti $60°$.

4. Bod F se nazývá *Fermatův bod.*



Obr. 4

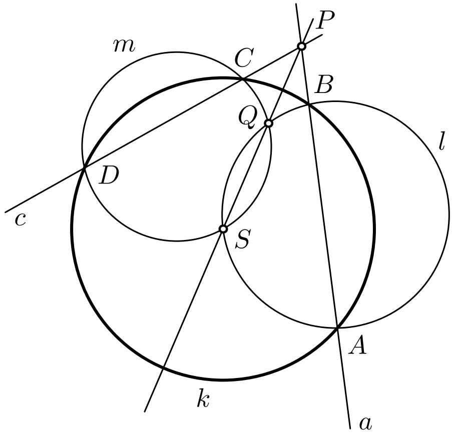
Řešení. Obrazem úsečky AL v otočení se středem C o $-60°$ je úsečka MB. Průsečík obou úseček je bod F. Díky tomuto otočení je $|\sphericalangle AFM| = |\sphericalangle BFL| = 60°$. Jelikož je také $|\sphericalangle ACM| = |\sphericalangle BCL| = 60°$, jsou čtyřúhelníky $AFCM$, $BFCL$ tětivové. Kružnice opsané těmto čtyřúhelníkům se protínají v bodě F.

Protože $|\sphericalangle AFM| = 60°$, je $|\sphericalangle AFB| = 120°$, a jelikož $|\sphericalangle AKB| = 60°$, lze opsat kružnici i čtyřúhelníku $AKBF$.

Jelikož je čtyřúhelníku $AFCM$ opsána kružnice a $|\sphericalangle CAM| = 60°$, dostaneme $|\sphericalangle CFM| = 60°$. Podobně je $|\sphericalangle AFK| = 60°$. To znamená, že body K, F, C leží na jedné přímce.

Příklad 5

Jsou dány dvě kružnice l, m, které se protínají v bodech S, Q. A je dána kružnice k se středem S, která protíná obě kružnice l, m v bodech A, B, C, D, jak ukazuje obr. 5. Uvažujeme případ, kdy se přímky AB a CD protínají v bodě P. Dokažte, že body S, Q, P leží na jedné přímce.



Obr. 5

Řešení. Zde využijeme zobrazení kruhovou inverzí pomocí kružnice k. V ní se kružnice l, m zobrazí postupně na přímky AB, CD. V této inverzi se také zobrazí průsečík kružnic l, m na průsečík P přímek AB, CD. A jelikož v kruhové inverzi leží její střed a zobrazovaný bod a jeho obraz na jedné přímce, leží tedy body S, Q, P na jedné přímce.

Příklad 6

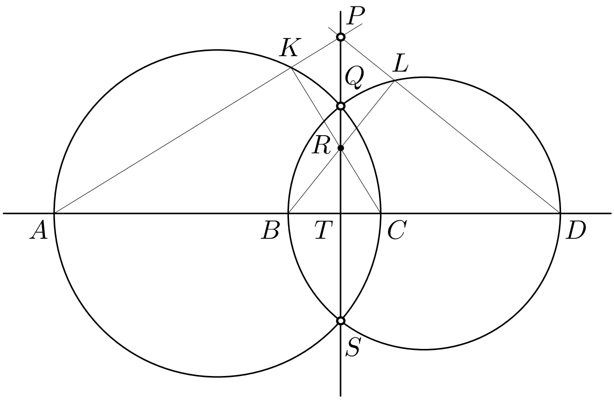
Na přímce jsou dány čtyři body A, B, C, D. Dvě kružnice s průměry AC a BD se protínají v bodech S, Q (obr. 6). Uvnitř úsečky SQ je zvolen libovolný bod $R \neq T$, kde T je průsečík přímek AB, SQ. Přímka CR protne jednu kružnici v bodě K a přímka BR protne druhou kružnici v bodě L. Přímky AK a DL se protínají v bodě P. Dokažte, že body S, Q, P leží na jedné přímce.

Řešení. Abychom dokázali, že se přímky AK a DL protínají s přímkou SQ v jednom bodě, musíme dokázat, že

$$|TA| \cdot \operatorname{tg} |\sphericalangle TAK| = |TD| \cdot \operatorname{tg} |\sphericalangle TDL|.$$

Využijeme toho, že trojúhelníky ACK a RTC jsou podobné podle věty uu, takže budeme dokazovat, že

$$
\begin{aligned}
|TA| \cdot \operatorname{tg} |\sphericalangle TRC| &= |TD| \cdot \operatorname{tg} |\sphericalangle TRB|, \\
|TA| \cdot \frac{|TC|}{|TR|} &= |TD| \cdot \frac{|TB|}{|TR|}, \\
|TA| \cdot |TC| &= |TD| \cdot |TB|.
\end{aligned}
$$



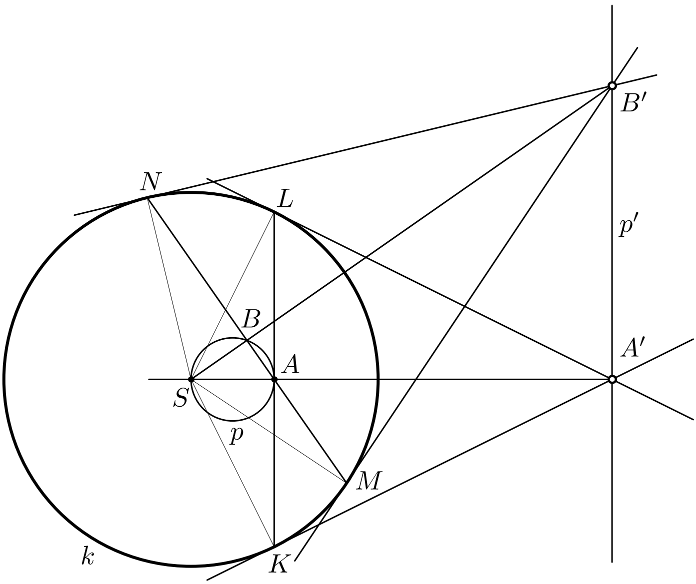
Obr. 6

Jelikož bod T leží na chordále daných dvou kružnic, tak požadovaná rovnost platí, a tím je tedy důkaz dokončen.

Příklad 7

Je dána kružnice k se středem S a uvnitř této kružnice bod $A \neq S$. Bodem A jsou vedeny tři tětivy. U každé této tětivy jsou v krajních bodech sestrojeny tečny ke kružnici k. Tyto tečny se vždy protnou v jednom bodě. Dokažte, že vzniklé tři průsečíky tečen leží na jedné přímce.

Řešení. Situace je částečně znázorněna na obr. 7. Na tomto obrázku je jedna tětiva KL, která má střed v daném bodě A. To je z důvodu, že takováto tětiva poslouží k důkazu tvrzení. A nevadí, že je použita právě tato tětiva, neboť tvrzení má platit pro jakoukoliv tětivu procházející bodem A. Na obr. 7 také nejsou znázorněny tři tětivy, ale je tam ještě jen jedna další tětiva MN. To opět nevadí, protože když tvrzení dokážeme pro tuto tětivu, tak stejný postup se použije i pro další tětivy.



Obr. 7

Sestrojíme kružnici p nad průměrem SA. Jejím obrazem v kruhové inverzi s kružnicí k je přímka p' procházející bodem A', který vznikne jako průsečík tečen ke kružnici k v bodech K, L, a je kolmá na přímku AA'.

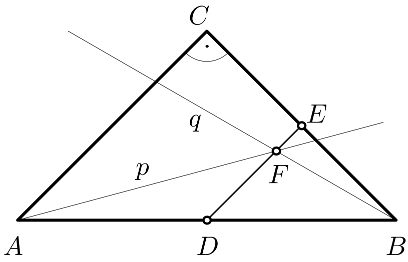
Kružnice p protíná tětivu MN v bodě B, což je třed úsečky MN, neboť úhel SBA je pravý. Pomocí kruhové inverze se bod B zobrazí na bod B' ležící na přímce p'. Podle definice kruhové inverze platí

$$|SB| \cdot |SB'| = |SN|^2.$$

To je ale zároveň Eukleidova věta o odvěsně pro trojúhelník SNB', což znamená, že úhel SNB' je pravý, a tedy bod B' leží na tečně ke kružnici k v bodě N. Tím je důkaz hotov.

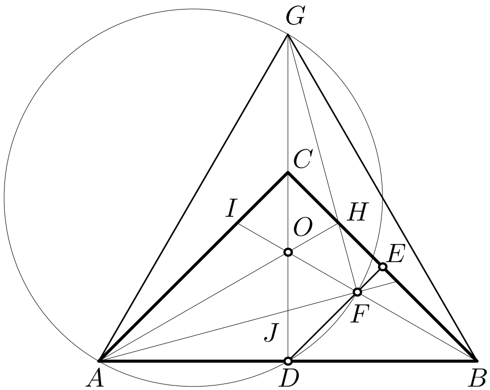
Příklad 8

Je dán rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Středy stran AB, BC označme postupně D, E. Sestrojíme přímku p, která prochází bodem A a svírá s přímkou AB úhel o velikosti $15°$, viz obr. 8a. Také sestrojíme přímku q, která prochází bodem B a svírá s přímkou AB úhel o velikosti $30°$. Průsečík přímek p, q označme F. Dokažte, že body D, E, F leží na jedné přímce.



Obr. 8a

Řešení. Jelikož v úloze pracujeme s násobky úhlu o velikosti 15°, zkusíme doplnit pravoúhlý trojúhelník ABC o rovnostranný trojúhelník ABG (obr. 8b). Jeho střed označme O.



Obr. 8b

V uvedeném rovnostranném trojúhelníku je velikost úhlu ADG rovna 90°. Díky symetrii podle přímky BO jsou velikosti úhlů FAG a FGA rovny 45°, proto má úhel AFG velikost také 90°. Tím pádem leží body A, D, F, G na Thaletově kružnici nad průměrem AG. Nad tětivou FG této kružnice mají obvodové úhly velikost 45°, proto i úhel FDG má velikost 45°. Proto je přímka DF rovnoběžná s přímkou AC.

A jelikož je bod E středem strany BC, je díky stejnolehlosti se středem B přímka DE rovnoběžná s přímkou AC.

Vidíme tedy, že přímky DF, DE splývají, a tak body D, F, E leží na téže přímce.

Úlohy k samostatnému řešení

Úloha 1

Je dána kružnice $k(O;r)$ a bod A vně této kružnice. Sestrojte body S, P, které leží na kružnici k a na přímce procházející bodem A a platí $|AS| = |SP|$.

Úloha 2

Dokažte tvrzení z příkladu 2 pro tupoúhlý trojúhelník ABC s tupým úhlem při vrcholu C.

Úloha 3 (Napoleonova věta)

Dokažte, že středy rovnostranných trojúhelníků AKB, BLC, CMA v příkladu 4 tvoří vrcholy též rovnostranného trojúhelníku.

Úloha 4

Platí tvrzení z příkladu 4 i pro případ, že rovnostranné trojúhelníky nejsou připsány stranám trojúhelníku ABC z vnější strany, ale jsou připsány stranám trojúhelníku ABC do polorovin, v němž leží trojúhelník ABC?

Úloha 5

Dokažte, že středy čtyř čtverců, které jsou vně připsány stranám rovnoběžníku, jsou vrcholy dalšího čtverce.

Úloha 6

Dokažte, že v příkladu 5 jsou tečny ke kružnicím l, m v bodě S rovnoběžné s přímkami a, c.

Úloha 7

Platí tvrzení z příkladu 7 i v případě, kdy bod A leží přímo na kružnici k, nebo vně kružnice k?

Úloha 8

Dokažte, že bod O na obr. 8b je střed kružnice vepsané čtyřúhelníku $AFHC$.

Úloha 9

Dokažte, že trojúhelník HIJ na obr. 8b je rovnostranný.

Návody k řešení zadaných úloh

Úloha 1: Bod Q budiž průsečíkem kružnic $l(O;2r)$ a $m(A;r)$. Díky středové souměrnosti se středem S jsou trojúhelníky POS a AQS shodné. Proto je S střed úsečky OQ. Úloha má dvě řešení pro každý bod A ležící uvnitř mezikruží omezeného kružnicemi k a l.

Úloha 2: Důkaz je veden úplně stejně jako v příkladu 2.

Úloha 3: K důkazu je možné použít úvahy z příkladů 2 a 3.

Úloha 4: Platí. Důkaz je možné vésti úplně stejně jako v příkladu 4.

Úloha 5: Máme rovnoběžník $ABCD$. Připsané čtverce jsou $IJBA$, $KLCB$, $MNDC$, $OPAD$. Středy těchto čtverců postupně jsou U, V, X, Y. Platí $|UB| = |XC|$, $|BV| = |CV|$, $|\sphericalangle UBV| = |\sphericalangle XCV|$. Tedy trojúhelníky UBV, XCV jsou shodné a vzájemně otočené o $90°$. Proto je $|UV| = |XV|$ a jsou tyto úsečky kolmé.

Úloha 6: Např. tečna v bodě S ke kružnici l je kolmá na průměr této kružnice procházející bodem S. Stejně tak je tomu se sečnou AB této kružnice.

Úloha 7: Platí. Důkaz je stejný jako v příkladu 7.

Úloha 8: Z obr. 8b je patrné, že znázorněné přímky dělí vnitřní úhly ve čtyřúhelníku $AFHC$.

Úloha 9: Přímka HI je kolmá na přímku DG atd.

Závěr

Tento článek je pokračováním tématu o třech zajímavých bodech v geometrických útvarech, které leží na jedné přímce. Oproti předchozím článkům jsou zde k důkazům využívána převážně geometrická zobrazení a věta o obvodových úhlech v kružnici. Nejvíce zde byly využity publikace [1–6].

Problematika tří zajímavých bodů ležících na jedné přímce bude pokračovat i v navazujícím článku.

Literatura

[1] *Boček, L., Zhouf, J.*: Planimetrie. 2. rozšířené vydání, PedF UK, Praha, 2012.

[2] *Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L.*: Geometry revisited. The Mathematical Association of America, 1967.

[3] *Coxeter, H. S. M.*: Introduction to Geometry, second edition. John Wiley and Sons, 1989.

[4] *Honsberger, R.*: Mathematical Chestnuts from Around the World. The Mathematical Association of America, 2001.

[5] *Švrček, J., Vanžura J.*: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha, 1988.

[6] *Švrček, J.*: Tvorba a využití gradovaných řetězců matematických úloh. UP, Olomouc, 2009.