

# Počítáme bez kalkulačky

JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Obsah tohoto příspěvku tvoří odvození, popis a aplikace dvou užitečných metod (praktických postupů) pro rychlý výpočet dvojmocí (přirozených) čísel, která končí číslicí 5, a na prezentaci snadného výpočtu druhých mocnin dvojmístných přirozených čísel začínajících číslicí 5. Poznátky, které v tomto článku najdete, lze přitom přímo (bez jakékoliv obsáhlé propedeutiky) přenést mezi žáky našich středních i základních škol<sup>1)</sup>.

V celém příspěvku vystačíme pouze se dvěma základními algebraickými formulemi (vzorcí) – se známým vzorcem pro umocnění dvojcíle na druhou a se vzorcem pro rozdíl druhých mocnin reálných (zde speciálně přirozených) čísel.

## Druhé mocniny přirozených čísel končících číslicí 5

Libovolné přirozené číslo  $n$ , které končí číslicí 5, lze zapsat ve tvaru  $n = 10a + 5$ , kde  $a$  je přirozené číslo. Pro jeho druhou mocninu pak platí

$$n^2 = (10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = a(a + 1) \cdot 100 + 25. \quad (1)$$

V řádu stovek na pravé straně (1) tak obdržíme součin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel  $a$ ,  $a + 1$  a současně vidíme, že poslední dvojcíslné číslo  $n^2$  je vždy 25. Odtud je již patrný algoritmus snadného výpočtu dvojmocí přirozených čísel končících číslicí 5.

Např. pro  $a = 4$ , tj.  $n = 45$ , tedy podle (1) platí

$$45^2 = (10 \cdot 4 + 5)^2 = 4 \cdot 5 \cdot 100 + 25 = 2000 + 25 = 2025,$$

nebo pro  $a = 11$ , tj.  $n = 115$ , dostaneme

$$115^2 = (10 \cdot 11 + 5)^2 = 11 \cdot 12 \cdot 100 + 25 = 13200 + 25 = 13225.$$

---

<sup>1)</sup>Modifikovaný obsah tohoto příspěvku byl původně určen účastníkům podzimní školy MAKOS, která se konala v září 2021 v Orlických horách, a je převzat s laskavým svolením editorů z minisborníčku „Zápisky z 29. podzimní školy péče o matematické talenty – MAKOS 2021“.

Výpočty obou výše uvedených druhých mocnin lze tak bez větších problémů provést přímo „z hlavy“.

Obdobně lze postupovat také při rychlém výpočtu druhých mocnin dvojmístných přirozených čísel začínajících číslicí 5, tj. přirozených čísel majících na místě desítek pětku.

## Druhé mocniny čísel 50, 51, 52, . . . , 59

Dvojmístná přirozená čísla  $m$  začínající číslicí 5 lze zapsat ve tvaru  $m = 50 + b$ , kde  $b$  je číslice desítkové soustavy. Pro jejich druhé mocniny tak platí

$$m^2 = (50 + b)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot b + b^2 = 2500 + 100b + b^2. \quad (2)$$

Užitím (2) tak např. pro  $b = 3$ , tj.  $m = 53$ , obdržíme

$$53^2 = (50 + 3)^2 = 2500 + 100 \cdot 3 + 9 = 2809$$

nebo např. pro  $b = 7$ , tj.  $m = 57$ , dostaneme

$$57^2 = (50 + 7)^2 = 2500 + 100 \cdot 7 + 49 = 3249.$$

Také oba tyto výpočty lze snadno provést „z hlavy“ (bez použití kalkulačky).

*Poznámka.* Ke snadnému výpočtu hodnoty  $55^2 = 3025$  lze přitom použít obou výše uvedených vztahů – (1) i (2).

## Některé užitečné aplikace

Závěrem uvádíme několik typických příkladů, při jejichž výpočtu využíváme podstatným způsobem vztahy (1) a (2).

a) Využití vzorce

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B),$$

kde  $A, B$  jsou libovolná reálná (zde přirozená) čísla:

### Příklad 1

$$35 \cdot 55 = (45 - 10)(45 + 10) = 45^2 - 10^2 = 2025 - 100 = 1925.$$

### Příklad 2

$$35 \cdot 85 = (60 - 25)(60 + 25) = 60^2 - 25^2 = 3600 - 625 = 2975.$$

**Příklad 3**

$$84 \cdot 86 = (85 - 1)(85 + 1) = 85^2 - 1^2 = 7\,225 - 1 = 7\,224.$$

**Příklad 4**

$$53 \cdot 57 = (55 - 2)(55 + 2) = 55^2 - 2^2 = 3\,025 - 4 = 3\,021.$$

**Příklad 5**

$$\begin{aligned} 47 \cdot 54 &= (50 - 3)(50 + 4) = \\ &= 50^2 + 1 \cdot 50 - 12 = 2\,500 + 50 - 12 = 2\,538. \end{aligned}$$

**Příklad 6**

$$\begin{aligned} 555^2 &= 55 \cdot 56 \cdot 100 + 25 = 55 \cdot (55 + 1) \cdot 100 + 25 = \\ &= (55^2 + 55) \cdot 100 + 25 = (3\,025 + 55) \cdot 100 + 25 = 308\,025. \end{aligned}$$

b) Využití vzorce

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2,$$

kde  $A, B$  jsou libovolná reálná (přirozená) čísla:

**Příklad 7**

$$49^2 = (50 - 1)^2 = 2\,500 - 100 + 1 = 2\,401.$$

**Příklad 8**

$$86^2 = (85 + 1)^2 = 85^2 + 2 \cdot 85 \cdot 1 + 1 = 7\,225 + 170 + 1 = 7\,396.$$

**Příklad 9**

$$29 \cdot 33 = (31 - 2)(31 + 2) = 31^2 - 2^2 = (30 + 1)^2 - 4 = (900 + 60 + 1) - 4 = 957$$

nebo případně také

$$29 \cdot 33 = (30 - 1)(30 + 3) = 30^2 + 2 \cdot 30 - 3 = 900 + 60 - 3 = 957.$$

Z řešení výše uvedených devíti příkladů je patrné, že zručný počtář může všechny tyto úlohy (a také drtivou většinu jim podobných) vypočítat snadno a rychle – bez použití kalkulačky.