Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 31. 12. 2023 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu *mfi@upol.cz.* Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 287

Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou BC. Osa vnitřního úhlu při vrcholu B protíná výšku AR a odvěsnu AC daného trojúhelníku po řadě v bodech P a Q. Dokažte, že $|CQ| = 2|PR|$.

Jaroslav Švrček

Úloha 288

Pro nezáporné reálná čísla x, y uvažujme nerovnost

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1+\sqrt{x+y}} \geq 2\sqrt{2}-2$$

a výraz $V(x,y) = \sqrt{x}+\sqrt{y}$.

a) Najděte množinu M_1 všech možných hodnot výrazu V pro dvojice nezáporných x, y, které vyhovují uvedené nerovnosti.

b) Najděte množinu M_2 všech možných hodnot výrazu V takových, že pro libovolnou dvojici nezáporných reálných čísel x, y, pro kterou $V(x,y) \in M_2$, platí uvažovaná nerovnost.

Ján Mazák

Dále uvádíme řešení úloh 283 a 284, jejichž zadání jsme zveřejnili v prvním čísle aktuálního (33.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 283

Určete nejmenší přirozené číslo n, které dává současně při dělení třemi zbytek 2, při dělení čtyřmi zbytek 3, při dělení pěti zbytek 4 a při dělení číslem 2023 zbytek 1.

Jaroslav Švrček

Řešení (podle *Karola Gajdoše*). Podle zadání je číslo $n+1$ dělitelné třemi, čtyřmi i pěti, tedy je dělitelné jejich nejmenším společným násobkem 60. Existuje tak přirozené číslo m, že $n+1 = 60m$. Dále ze zadání vidíme, že číslo $n+1$ dává při dělení číslem 2023 zbytek 2, existuje tak přirozené číslo k, že platí $60m = n+1 = 2023k+2$. Odtud plyne, že k je sudé číslo, tedy $k = 2p$ pro přirozené číslo p a tedy $30m = 2023p+1$. Číslice na místě jednotek v celém nezáporném čísle p je nutně 3, tedy existuje celé nezáporné číslo q, že $p = 10q+3$. Dosazením dostaneme po úpravě $3m = 2023q+1$. Jelikož číslo 2023 dává při dělení třemi zbytek 1, musí číslo q při dělení třemi dávat zbytek 2. Číslo n bude nejmenší, právě když bude nejmenší k, tedy p i q. Nejmenší celé nezáporné číslo q, které při dělení třeni dává zbytek 2 je $q = 2$, odtud $p = 23$, tedy $k = 46$, a proto $n+1 = 2023 \cdot 46 + 2 = 93\,060$, a tak hledané číslo n je rovno $93\,059$.

Jiné řešení. Stejně jako v předcházejícím řešení budeme hledat přirozená čísla m a k, pro která platí

$$60m = n+1 = 2023k+2 = (60 \cdot 34 - 17)k + 2 = 60 \cdot 34k - (17k-2).$$

Hledáme tak nejmenší přirozené číslo k, pro které je $17k-2$ dělitelné šedesáti. Jelikož $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$, vidíme odtud, že číslo k při dělení třemi dává zbytek 1, při dělení čtyřmi zbytek 2 a při dělení pěti zbytek 1. Proto je číslo $k+14$ dělitelné jak třemi, tak i čtyřmi a pěti, tedy je dělitelné šedesáti. Číslo n bude nejmenší, právě když bude nejmenší k, tedy i $k+14$. Nejmenší číslo dělitelné 60 tvaru $k+14$, kde k je přirozené číslo, je 60, tedy $k = 46$, a proto stejně jako v předcházejícím řešení $n = 93\,059$.

Jiné řešení (podle *Tomáše Hausera*). Užijeme čínskou větu o zbytcích.

- $4 \cdot 5 \cdot 2023 = 40\,460$. Toto číslo při dělení třemi dává zbytek 2.
- $3 \cdot 5 \cdot 2023 = 30\,345$. Navíc číslo $3 \cdot 30\,345 = 91\,035$ při dělení čtyřmi dává zbytek 3.
- $3 \cdot 4 \cdot 2023 = 24\,276$. A číslo $4 \cdot 24\,276 = 97\,104$ při dělení pěti dává zbytek 4.
- $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Platí $60 \cdot 1787 = 107\,220 = 53 \cdot 2023 + 1$ a toto číslo tak při dělení číslem 2023 dává zbytek 1.

Z předešlých úvah plyne, že číslo

$$40\,460 + 91\,035 + 97\,104 + 107\,220 = 335\,819$$

dává po dělení třemi zbytek 2, po dělení čtyřmi zbytek 3, po dělení pěti zbytek 4 a po dělení 2023 zbytek 1. Všechna taková celá čísla pak mají tvar

$$335\,819 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2023k = 335\,819 + 121\,380k,$$

kde k je celé číslo. Nejmenší přirozené číslo dané vlastnosti tak zřejmě dostaneme pro $k = -2$ a tím bude hledané číslo

$$n = 335\,819 + 121\,380 \cdot (-2) = 93\,059.$$

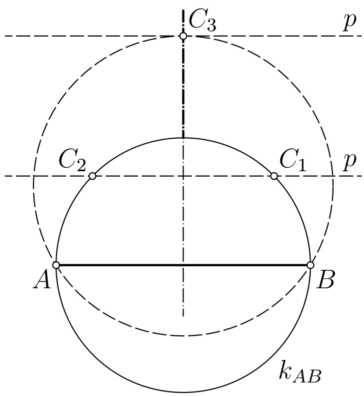
Správná řešení zaslali *Eliška Andrýsková*, *Jáchym Kouba*, *Radim Krška*, *Jindřich Kukla*, *Jan Polívka*, *Lucian Poljak* a *Lenka Poljaková*, všichni z GJŠ v Přerově, *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Tomáš Hauser* z Kolína, *Anton Hnáth* z Moravan a *Petr Kneys* z Jablonce nad Nisou.

Úloha 284

Jsou dány dva různé body A, B a přímka p rovnoběžná s úsečkou AB. Na přímce p najděte všechny body C, pro které je součin $|AC| \cdot |BC|$ co nejmenší.

Pavel Calábek

Řešení. Výška ke straně AB trojúhelníku ABC je pro všechny body C přímky p rovna vzdálenosti rovnoběžných přímek AB a p, tedy obsah všech takových trojúhelníků je stejný, označme jej S. Označme γ velikost vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu C a R poloměr kružnice jemu opsané.



Podle známého vzorce pro obsah trojúhelníku a podle sinové věty platí

$$S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| \sin\gamma = \frac{|AC| \cdot |BC| \cdot |AB|}{4R}.$$

Jelikož S a $|AB|$ jsou konstantní, součin $|AC| \cdot |BC|$ bude nejmenší, právě když tuto vlastnost bude mít R. Přitom si uvědomme, že nejmenší možný poloměr mezi kružnicemi procházejícími body A a B má kružnice k_{AB} s průměrem AB. Podle toho, zda tato kružnice má s přímkou p společný bod uvažujme dvě možnosti.

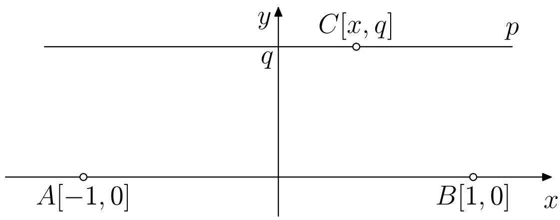
a) Pokud je vzdálenost přímek AB a p nejvýše rovna $|AB|/2$, má k_{AB} aspoň jeden společný bod s přímkou p, ten je pak hledaným bodem C. Přitom pokud je vzdálenost přímky p od přímky AB menší než $|AB|/2$, existují dva průsečíky k_{AB} a p, pokud je rovna $|AB|/2$, existuje takový bod jediný.

b) Pokud je vzdálenost přímek AB a p větší než $|AB|/2$, má nejmenší možný poloměr kružnice, která prochází body A a B a dotýká se přímky p. Tímto bodem dotyku C pak bude průsečík osy úsečky AB s přímkou p.

Jiné řešení. Umístěme body A, B do souřadné soustavy tak, že $A = [-1, 0]$, $B = [1, 0]$ a předpokládejme, že přímka p má vzdálenost $q > 0$ od osy x. Libovolný bod C přímky p tak má souřadnice $[x, q]$. Místo zadaného součinu ekvivalentně minimalizujme jeho druhou mocninu, platí tak

$$|AC|^2 \cdot |BC|^2 = \big((x+1)^2 + q^2\big) \cdot \big((x-1)^2 + q^2\big) =$$
$$= (x^2-1)^2 + 2q^2(x^2+1) + q^4 = (x^2 - 1 + q^2)^2 + 4q^2.$$

Problém minimalizace součinu $|AC| \cdot |BC|$ jsme touto úpravou převedli na minimalizaci výrazu $V = |x^2 - 1 + q^2|$. Vidíme, že pokud $q \le 1$, nabývá výraz V minima 0 v bodě $x = \pm\sqrt{1-q^2}$. Bod $C[\pm\sqrt{1-q^2}, q]$ pak leží, jak snadno ověříme, na kružnici se středem $[0, 0]$ a poloměrem 1, tedy na kružnici s průměrem AB. Pro $p > 1$ nabývá výraz V svého minima $q^2 - 1$ v bodě $x = 0$, bod $C[0, q]$ pak leží na průsečíku osy y s přímkou p, přičemž osa y je sou úsečky AB.



Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan a *Petr Kneys* z Jablonce nad Nisou.

Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně.

Pavel Calábek