MATEMATIKA

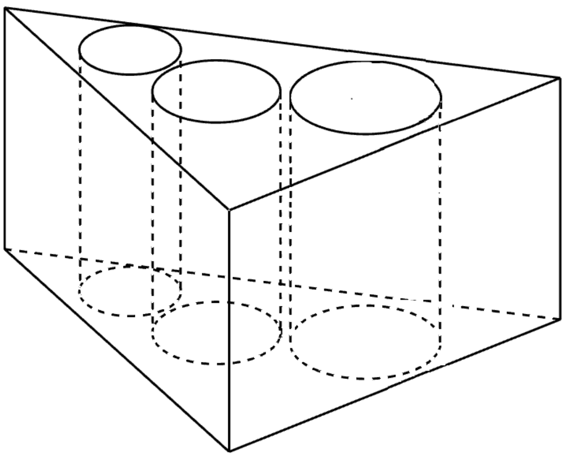
Malfattiho problém a jeho řešení

JOSEF POLÁK

Fakulta aplikovaných věd ZČU v Plzni

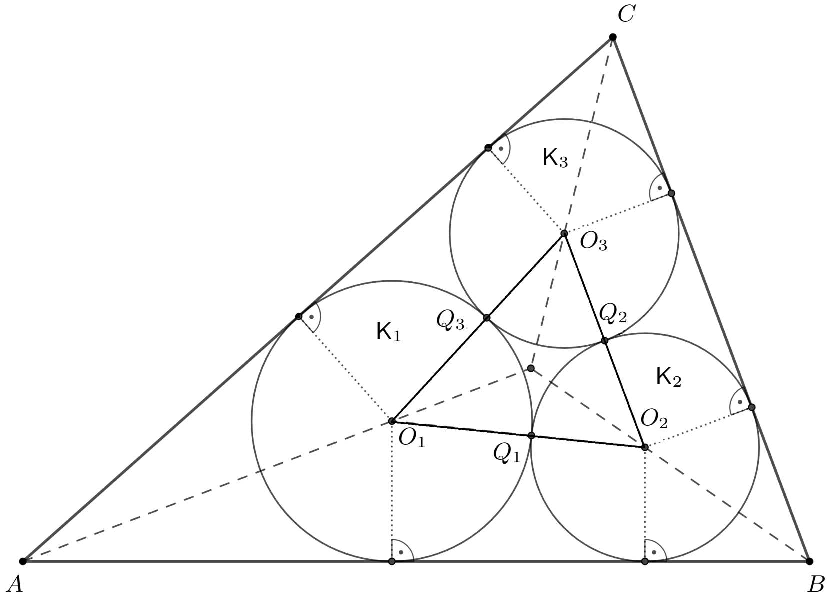
Historie Malfattiho problému

Gianfrancesco (*Gian Francesco*) *Malfatti* (1731–1807) byl italský matematik, který od roku 1771 po 30 let působil jako profesor matematiky na Univerzitě ve Ferraře. I poté do konce života se věnoval vědecké činnosti v matematice a jejích aplikacích. V roce 1803 se zabýval matematickým aplikačním problémem, nazývaným *Malfattiho mramorový problém* (*Malfattiho mramorová optimalizační úloha*) [7]: Z bloku mramoru ve tvaru trojbokého hranolu se mají vyřezat tři kruhové válce (obr. 1) tak, aby ztráty mramoru byly minimální.



Obr. 1

Pro vyřešení této aplikační úlohy Malfatti formuloval v rovině kolmé k osám válců odpovídající planimetrickou úlohu, zvanou *Malfattiho problém* (*Malfattiho planimetrická úloha*): Do daného trojúhelníku se mají vepsat tři nepřekrývající se kruhy (tzv. *Malfattiho kruhy*) takové, že součet jejich obsahů je co největší. Přitom se Malfatti zároveň intuitivně (ale nesprávně) domníval, že platí tzv. *Malfattiho hypotéza*, podle níž je řešení Malfattiho problému ekvivalentní s řešením planimetrické úlohy: Danému trojúhelníku vepsat tři nepřekrývající se kruhy takové, že každý z nich se dotýká ostatních dvou kruhů a dvou stran trojúhelníku (obr. 2).



Obr. 2

Řešení planimetrické úlohy v Malfattiho hypotéze se věnovalo mnoho matematiků po dobu dvou staletí [1]. Z nich se v literatuře nejčastěji cituje řešení, jehož autorem byl významný švýcarský matematik *Jakob Steiner* [10]. Zajímavé řešení odvodil např. též český matematik *Vilém Rychlík* (mladší bratr profesora Karla Rychlíka) [9].

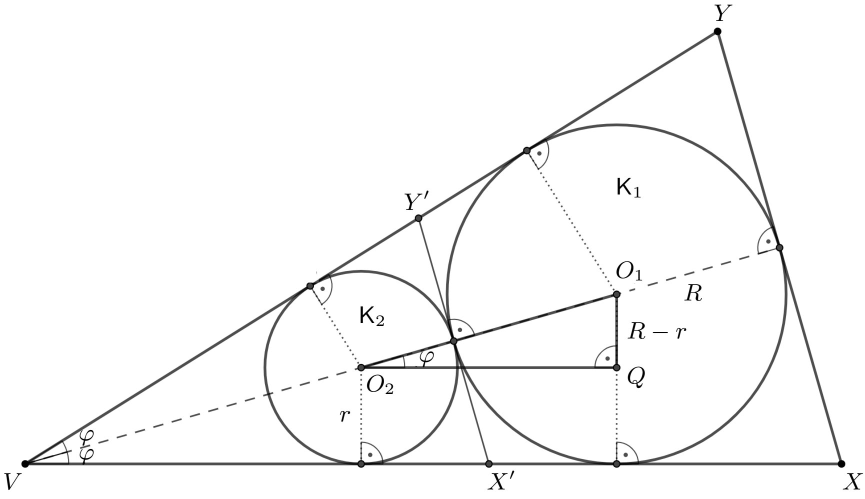
Avšak v roce 1930 angličtí matematici *Hyman Lob* a *Herbert William Richmond* odvodili, že Malfattiho hypotéza neplatí pro rovnostranné trojúhelníky [6] a v roce 1946 americký matematik *Howard Eves* ukázal, že ještě podstatně zřejmější je její neplatnost pro „dlouhé úzké" trojúhelníky [3]. V roce 1967 americký matematik *Michael Goldberg* dokázal, že Malfattiho hypotéza dokonce neplatí pro žádné trojúhelníky (libovolného tvaru) [4]. V letech 1990–1991 další autoři ukázali, že jeden z kruhů řešení Malfattiho problému musí být kruh vepsaný danému trojúhelníku. Úplné řešení Malfattiho problému odvodil až v roce 1992 rusko-izraelský matematik *Viktor Abramovič Zalgaller* (1920–2020) na základě podrobné analýzy možných případů (konfigurací trojic nepřekrývajících se kruhů v trojúhelníku) a užití goniometrických identit v práci [11], jejímž spoluautorem byl ukrajinský matematik *G. A. Los'*.

Poznámka. Historie Malfattiho problému a vyvrácení jeho hypotézy bývají často uváděny jako názorný příklad toho, že pouhá intuice může vést k nesprávnému matematickému tvrzení (viz např. [2, 5]).

V následující hlavní části našeho článku uvedeme postup odvození goniometrických podmínek řešení Malfattiho problému podle [11]. Vyjdeme přitom z goniometrického vyjádření poměru poloměrů dvojice tečných kruhů vepsaných do daného ostrého úhlu.

Dvojice tečných kruhů vepsaných do ostrého úhlu

Nechť K_1, K_2 jsou dva tečné kruhy s vnějším dotykem, se středy O_1, O_2 a poloměry R, r ($R > r$), jež jsou vepsané do daného ostrého úhlu velikosti 2φ (obr. 3).



Obr. 3

Z pravoúhlého trojúhelníku O_1O_2Q s pravým úhlem při vrcholu Q plyne vztah
$$\sin\varphi = \frac{R-r}{R+r} \tag{1}$$
a odtud
$$r = R\,\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}. \tag{2}$$
Rovnost (2) lze dále upravit užitím známého vzorce
$$\sin\varphi = \frac{2\,\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}},$$
odkud
$$1-\sin\varphi = \frac{(1-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2})^2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}, \quad 1+\sin\varphi = \frac{(1+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2})^2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}.$$
Po dosazení do rovnosti (2) nabývá tvaru
$$r = R\,\frac{(1-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2})^2}{(1+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2})^2}. \tag{3}$$

Řešení Malfattiho problému

Nechť ABC je libovolný ostroúhlý trojúhelník s vnitřními úhly o velikostech
$$\alpha \le \beta \le \gamma. \tag{4}$$

Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC je kružnice, která se dotýká všech jeho stran. Má střed v průsečíku os vnitřních úhlů a její poloměr je dán vzorcem
$$\rho = \frac{S}{s}, \tag{5}$$
kde při délkách stran a, b, c trojúhelníku ABC je $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ jeho poloviční obvod a S je jeho obsah, pro který platí *Heronův vzorec*
$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Kruh ohraničený vepsanou kružnicí se nazývá *kruh vepsaný trojúhelníku* ABC. Ze všech kruhů, jež lze umístit do daného trojúhelníku ABC, má zřejmě největší poloměr ρ a odtud plyne:

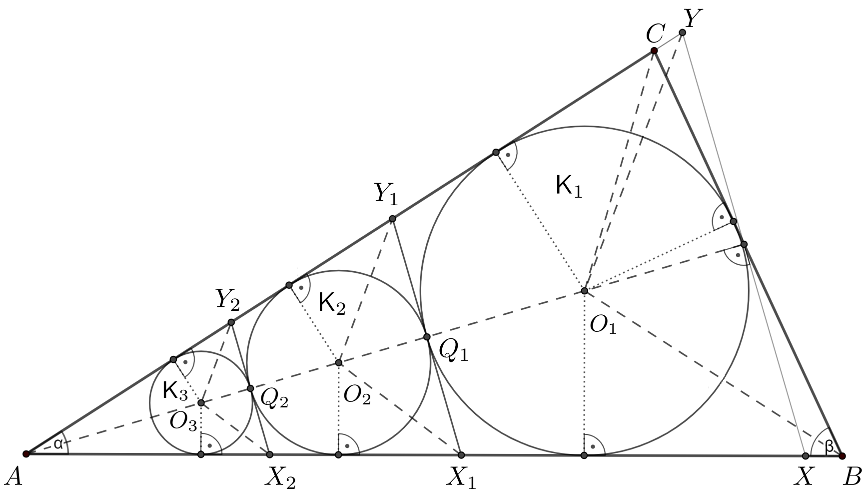
Věta 1

Ze všech kruhů ležících v trojúhelníku ABC kruh vepsaný trojúhelníku má maximální obsah $\pi\rho^2$.

Dále uvažujeme různé možné konfigurace (uspořádání vzájemné polohy) dvojic nepřekrývajících se kruhů, jež leží v trojúhelníku ABC splňujícím podmínky (4). Z rozboru všech možných konfigurací podle [1, 11] plyne:

Věta 2

Ze všech možných konfigurací *dvojic* nepřekrývajících se kruhů v trojúhelníku ABC splňujícím podmínky (4) má maximální součet obsahů dvojice tvořená kruhem K_1 vepsaným trojúhelníku ABC a k němu tečným kruhem K_2 (s vnějším dotykem v bodě Q_1) vepsaným trojúhelníku AX_1Y_1, kde X_1, Y_1 jsou průsečíky společné tečny kruhů K_1, K_2 v jejich bodu dotyku Q_1 s přímkami AB, AC (obr. 4, 5).



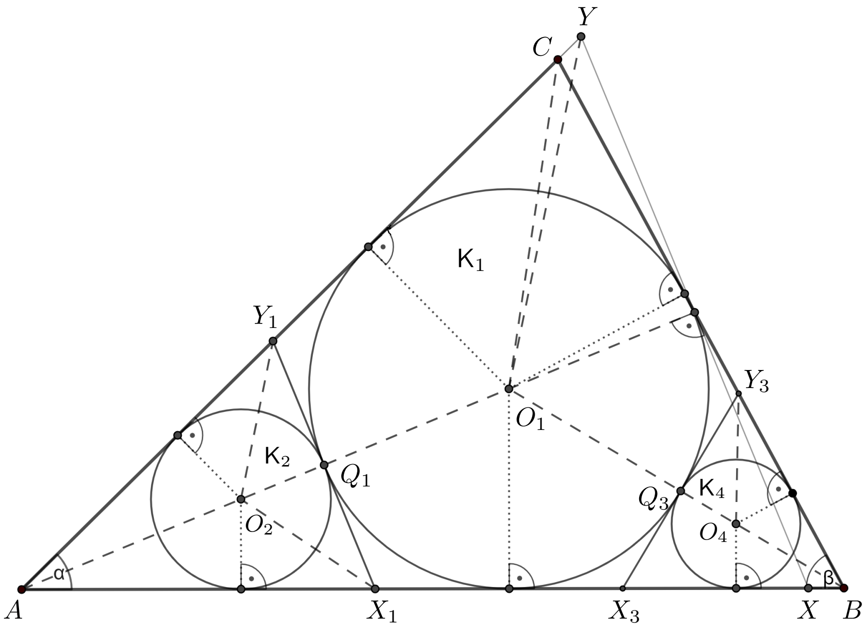
Obr. 4

Střed O_1 kruhu K_1 je průsečíkem os vnitřních úhlů trojúhelníku ABC a má poloměr $r_1 = \rho$ daný vzorcem (5), střed O_2 kruhu K_2 je průsečíkem osy vnitřního úhlu velikosti α a osy úhlu AY_1Q_1, jeho poloměr r_2 lze určit užitím vztahu (2):

$$r_2 = r_1 \frac{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \text{kde } r_1 = \rho. \tag{6}$$

Využitím věty 2 a z rozboru možných konfigurací tří nepřekrývajících se kruhů v trojúhelníku ABC podle [11] plyne:

Věta 3 (o řešení Malfattiho problému)
Ze všech možných konfigurací *trojic* nepřekrývajících se kruhů v trojúhelníku ABC splňujícím podmínky (4) má maximální součet obsahů trojice tvořená kruhy K_1, K_2 z věty 2 a tečným kruhem K_3 (s vnějším dotykem v bodě Q_2) vepsaným trojúhelníku AX_2Y_2, kde X_2, Y_2 jsou průsečíky společné tečny kruhů K_2, K_3 v jejich bodu dotyku Q_2 s přímkami AB, AC (obr. 4), resp. tečným kruhem K_4 (s vnějším dotykem v bodě Q_3) vepsaným trojúhelníku BX_3Y_3, kde X_3, Y_3 jsou průsečíky společné tečny kruhů K_2, K_4 v jejich bodu dotyku Q_3 s přímkami BA, BC (obr. 5).



Obr. 5

Uvažujme tedy dva případy konfigurací:
V konfiguraci kruhů K_1, K_2, K_3 (obr. 4) střed O_3 kruhu K_3 je průsečíkem osy vnitřního úhlu velikosti α a osy úhlu AY_2Q_2, jeho poloměr r_3 lze určit

užitím vztahů (2) a (6). Platí tak

$$r_3 = r_2 \frac{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} = \rho \frac{(1 - \sin \frac{\alpha}{2})^2}{(1 + \sin \frac{\alpha}{2})^2}. \tag{7}$$

V konfiguraci kruhů K_1, K_2, K_4 (obr. 5) střed O_4 kruhu K_4 je průsečíkem osy vnitřního úhlu velikosti β a osy úhlu BY_3Q_3, jeho poloměr r_4 lze určit užitím vztahů (2) a (3):

$$r_4 = r_1 \frac{1 - \sin \frac{\beta}{2}}{1 + \sin \frac{\beta}{2}} = \rho \frac{(1 - \operatorname{tg} \frac{\beta}{4})^2}{(1 + \operatorname{tg} \frac{\beta}{4})^2}. \tag{8}$$

Konfigurace kruhů K_1, K_2, K_3 (obr. 4) je řešením Malfattiho problému (tj. součet jejich obsahů je maximální), právě když v trojúhelníku ABC splňujícím podmínky (4) je obsah tečného kruhu K_3 větší nebo rovný obsahu tečného kruhu K_4, který by byl sestrojen v obr. 4 obdobně jako v obr. 5, a tedy pro jejich poloměry r_3, r_4 platí $r_3 \geq r_4$. Odtud užitím vztahů (7), (8) pro velikosti úhlů α, β splňující podmínky (4) plynou postupně ekvivalentní podmínky (neboť $\frac{\alpha}{2} < 90° \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} < 1$ a $\frac{\beta}{4} < 45° \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\beta}{4} < 1$):

$$\left(\frac{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2 \geq \left(\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\beta}{4}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\beta}{4}} \right)^2,$$

$$\left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\beta}{4}\right) \geq \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right) \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\beta}{4}\right),$$

$$1 - \sin \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{4} - \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{4} \geq 1 + \sin \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\beta}{4} - \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{4},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{4} \geq \sin \frac{\alpha}{2}. \tag{9}$$

Obdobně konfigurace kruhů K_1, K_2, K_4 (obr. 5) je řešením Malfattiho problému (tj. součet jejich obsahů je maximální), právě když v trojúhelníku ABC splňujícím podmínky (4) je obsah tečného kruhu K_4 větší nebo rovný obsahu tečného kruhu K_3, který by byl sestrojen v obr. 5 obdobně jako v obr. 4, a tedy pro jejich poloměry r_3, r_4 platí $r_3 \leq r_4$. Odtud užitím vztahů (7), (8) dospíváme k ekvivalentním podmínkám

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{4} \leq \sin \frac{\alpha}{2}. \tag{10}$$

Věta 4 (o podmínkách řešení Malfattiho problému)

Konfigurace kruhů K_1, K_2, K_3 z věty 3 je řešením Malfattiho problému pro trojúhelník ABC splňující podmínky (4), právě když v něm platí podmínky (9). Konfigurace kruhů K_1, K_2, K_4 z věty 3 je řešením Malfattiho problému pro trojúhelník ABC splňující podmínky (4), právě když v něm platí podmínky (10). V případě platnosti rovnosti v podmínkách (9), (10) má Malfattiho problém obě dvě řešení.

Konstrukční řešení

Pro trojúhelník ABC splňující podmínky (4) a $\sin\frac{\alpha}{2} < \operatorname{tg}\frac{\beta}{4}$ je provedeno konstrukční řešení Malfattiho problému v obr. 4, pro trojúhelník ABC splňující podmínky (4) a $\sin\frac{\alpha}{2} > \operatorname{tg}\frac{\beta}{4}$ je na obr. 5. K jeho realizaci je vhodné využití libovolného dostupného software dynamické geometrie, např. GeoGebry.

Literatura

[1] *Andreatta, M., Bezdek, A., Boroński, I. P.*: The problem of Malfatti: two centuries of debate. Mathematical Intelligencer, roč. 33 (2010), s. 72–76.

[2] *Balk, G. D., Balk, M. B.*: Ispytanija na pravdopodobije. Kvant, roč. 3 (1972), s. 20–25.

[3] *Eves, H.*: Malfatti Problem (problem 4145). American Mathematical Monthly, roč. 53 (1946), č. 5, s. 285–286. Upravená verze: Malfatti problem. A Survey of Geometry, Vol. 2, Allyn and Bacon, Boston, 1965, s. 245–247.

[4] *Goldberg, M.*: On the original Malfatti problem. Mathematics Magazine, roč. 40 (1967), s. 241–247.

[5] *Kuřina, F.*: Chyby, omyly a matematika. Matematika–fyzika–informatika, roč. 26 (2017), č. 3, s. 174–184.

[6] *Lob, H., Richmond, H. W.*: On the solutions of the Malfatti problem for a triangle. Proc. London Math. Soc., roč. 30 (1930), s. 287–304.

[7] *Malfatti, G.*: Memoria sopra un problema stereotomico. Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, roč. 10 (1803), s. 235–244.

[8] *Polák, J.*: Přehled středoškolské matematiky. Dotisk 10. vydání. Prometheus, Praha, 2019.

[9] *Rychlík, V.*: O Malfattiho problému I, II. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 40 (1911), s. 81–86, 245–250.

[10] *Steiner, J.*: Einige geometrische Betrachtungen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, roč. 1 (1826), s. 161–184, 252–288.

[11] *Zalgaller, V. A., Los', G. A.*: Rešenije problemy Malfatti. Ukrainskij geometričeskij sbornik, roč. 35 (1992), s. 14–33. The solution of Malfatti's problem. Journal of Mathematical Sciences, roč. 72 (1994), s. 3163–3177.