Zajímavé matematické úlohy

Po čtyřech letech uzavíráme další část naší dlouhodobé soutěže. V letech 2020–2023 jsme v naší rubrice zveřejnili a čtenářům předložili 32 nových úloh. K nim jsme obdrželi 337 řešení od 107 řešitelů. Nejvíce řešení do redakce zaslali (v závorce je uveden jejich počet):

1. *Karol Gajdoš* z Trnavy (26),
2. *Anton Hnáth* z Moravan (16),
3. *František Jáchim* z Volyně (15),

4.–6. *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Lenka Poljaková*, GJŠ Přerov (10),

7. *Piotr Kulisz*, ZSOT Lubliniec (Polsko) (9),

8.–9. *Michal Janík* G Brno, tř. Kpt. Jaroše a *Samuel Rosiar*, GJK Praha 6 (8).

Nakladatelství Prometheus odmění výše uvedené řešitele svými knihami.

Na dalších místech se umístili: *Amálie Dostalíková*, Přerov, *Karel Stehlík*, GChD Praha 5 a *Ondřej Trinkewitz*, G a SPŠE Frenštát pod Radhoštěm (všichni 6), *Anastasia Bredikhina*, GJK Praha 6, *Tereza Černá*, G Praha 9, Litoměřická, *Adam Mendl*, GPdC Tábor, *Vendula Onderková*, Přerov, *Lucian Poljak*, GJŠ Přerov (všichni 5), ...

V další části naší pravidelné rubriky uveřejňujeme dvě nové úlohy. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 31. 3. 2024 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 289

Určete všechny trojice (p, q, r) prvočísel, pro něž platí

$$p + 2q^2 + 3r^3 = 2023.$$

Jaroslav Švrček

Úloha 290

Lenka zvolila tři navzájem různá reálná čísla a, b, c a vypočítala hodnoty tří výrazů

$$\left|\frac{a+b}{(a-c)(b-c)}\right|, \quad \left|\frac{b+c}{(b-a)(c-a)}\right|, \quad \left|\frac{c+a}{(c-b)(a-b)}\right|.$$

Dokažte, že jedna z těchto tří hodnot je rovna součtu zbylých dvou.

Josef Tkadlec

Dále uvádíme řešení úloh 285 a 286, jejichž zadání jsme zveřejnili ve druhém čísle aktuálního (33.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 285

Dokažte, že pro každou číslici $c \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ existuje takové přirozené číslo L_c, že počet všech přirozených čísel nejvýše rovných L_c, v jejichž desítkovém zápisu se vyskytuje číslice c, je roven $L_c/2$.

Czesław Lipinski (*Německo*)

Řešení. Podobná úloha byla poprvé uvedena v roce 1950 v polském časopise *Matematyka* pod číslem 177, autor se podepsal A.M.R. (Warszawa). V této úloze se požadovalo, aby řešitel našel všechna taková čísla L_c. V následujících číslech nikdy nebylo zveřejněno úplné řešení, objevilo se pouze několik částečných řešení.

Označme D_n množinu všech čísel přirozených čísel menších než 10^n, těchto čísel je právě $10^n - 1$. Představme si, že všechna tato čísla zapíšeme pomocí právě n číslic, přitom považujeme za přípustný zápis čísla, které začíná několika nulami. Zřejmě právě $9^n - 1$ z nich není zapsáno pomocí některé číslice $c \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Tedy právě $10^n - 9^n$ čísel z množiny D_n je zapsáno pomocí číslice c.

Na množině přirozených čísel uvažujme funkci

$$g(n) = \frac{10^n - 9^n}{10^n - 1}.$$

Tato funkce (o které se dá snadno dokázat, že je rostoucí na množině přirozených čísel) udává relativní podíl čísel, která jsou zapsána pomocí některé číslice c v množině D_n. Platí $g(6) \doteq 0{,}46856$ a $g(7) \doteq 0{,}5217$. Odtud vidíme, že v množině D_6 je méně čísel zapsaných pomocí některé číslice c než čísel, která v desítkovém zápise obsahují číslici c, zatímco v množině D_7 jich je již více.

Pro libovolnou číslici $p < c$ je počet číslic z množiny D_7, jejichž desítkový zápis začíná číslicí p a obsahují v něm číslici c, roven $10^6 - 9^6$. Takových číslic $p < c$ je v množině $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$ právě c, tedy v množině D_7 je právě $c(10^6 - 9^6)$ čísel, jejichž desítkový zápis začíná číslicí menší než c (včetně nuly) a jsou zapsána pomocí číslice c.

Ukážeme, že pro libovolnou číslici c můžeme některá z čísel L_c hledat mezi sedmimístnými čísly, jejichž desítkový zápis začíná číslicí c. Počet sedmimístných čísel, jejichž desítkový zápis začíná číslicí menší než c, je $c \cdot 10^6 - 1$. Z nich je zapsáno, jak jsme ukázali výše, právě $c(10^6 - 9^6)$ čísel pomocí číslice c. Nerovnost

$$\frac{c(10^6 - 9^6)}{c\cdot 10^6 - 1} < \frac{c(10^6 - 9^6)}{c\cdot 10^6 - c} = \frac{10^6 - 9^6}{1\cdot 10^6 - 1} = g(6) \doteq 0{,}468\,56$$

již dokazuje požadované tvrzení.

Hledejme nyní sedmimístné číslo L_c, jehož desítkový zápis začíná číslicí c (tedy $L_c \geq c \cdot 10^6$). Počet všech čísel, která jsou menší než $c \cdot 10^6$ a nejsou zapsána pomocí číslice c, je roven

$$(c \cdot 10^6 - 1) - c(10^6 - 9^6) = c \cdot 9^6 - 1 = 531\,441c - 1.$$

Podle zadání platí

$$L_c = 2(c \cdot 9^6 - 1) = 2(531\,441c - 1) = 1\,062\,882c - 2.$$

Pro některá požadovaná čísla c jsme našli některá hledaná čísla L_c. Tato čísla zapíšeme do tabulky:

c	1	2	3	4	5
L_c	1 062 880	2 125 762	3 188 644	4 251 526	5 314 408
c	6	7	8	9	
L_c	6 377 290	7 440 172	8 503 054	9 565 936	

Poznámka 1. Výše uvedený postup najde nejmenší vyhovující čísla L_c pro $c \in \{6, 7, 8, 9\}$. V následují tabulce uvedeme nejmenší L_c pro zbývající číslice:

c	1	2	3	4	5
L_c	2	2	39 364	472 390	590 488

Poznámka 2. Není obtížné dokázat, že desítkový zápis nejmenšího čísla L_c začíná mimo $c = 1$ právě číslicí c. Současně také lze dokázat, že číslo $L_1 = 1\,062\,880$ je největší ze všech čísel L_1.

Jiné řešení. Číslo L_c je zřejmě sudé. Pro libovolné přirozené číslo n označme $s_c(n)$ počet všech čísel menších nebo rovných n, která jsou zapsána užitím číslice c. Na množině všech sudých čísel uvažujme funkci $h_c(n) = s_c(n) - n/2$. Tato funkce zřejmě nabývá jen celočíselných hodnot.

Po snadné úpravě platí

$$h_c(n+2) - h_c(n) = s_c(n+2) - s_c(n) - 1.$$

Tedy

$$h_c(n+2) - h_c(n) = \begin{cases} 1, & \text{pokud obě čísla } n+1 \text{ a } n+2 \text{ jsou zapsána} \\ & \text{pomocí číslice } c, \\ 0, & \text{pokud jedno z těchto čísel číslici } c \text{ obsahuje} \\ & \text{a druhé nikoliv,} \\ -1, & \text{pokud obě tato čísla číslici } c \text{ neobsahují.} \end{cases}$$

To znamená, že při přechodu k následujícímu sudému číslu funkce h_c změní hodnotu o jedno z čísel 1, 0, -1. V množině $\{1, 2, \ldots, 10\}$ existují dvě čísla (1, 10), která ve svém zápise obsahují číslici 1, zbývající nenulové číslice c pak obsahuje právě jedno číslo c. Proto platí

$$h_1(10) = 2 - 5 = -3, \; h_2(10) = h_3(10) = \ldots = h_9(10) = 1 - 5 = -4.$$

Všechny tyto hodnoty jsou záporné.

Stejným způsobem jako v předešlém řešení zjistíme, že v množině přirozených čísel, která jsou nejvýše rovna 10 000 000, je zapsáno pomocí číslice $c > 1$ právě $10^7 - 9^7 = 5\,217\,031$ čísel. Podobně v této množině obsahuje číslici 1 ještě navíc číslo 10 000 000, platí tak

$$h_1(10\,000\,000) = 5\,217\,032 - 5\,000\,000 = 217\,032,$$
$$h_2(10\,000\,000) = \ldots = h_9(10\,000\,000) = 5\,217\,031 - 5\,000\,000 = 217\,031,$$

a tyto hodnoty jsou vesměs kladné.

Protože funkce h_c při přechodu k následujícímu sudému číslu změní hodnotu o některé z čísel +1, 0, -1, je zřejmé, že někde mezi čísly 10 a 10 000 000 nabude hodnotu 0. A číslo, ve kterém tato funkce nabude hodnotu 0 je právě hledané číslo L_c.

Poznámka 3. Číslo, ve kterém funkce h_c nabude hodnotu 0 nemusí být jediné. Například v dané množině nabývá funkce h_1 hodnotu 0 pro čísla 6, 24, 160, 270, 272, 1456, 3 398, 3 418, 3 420, 3 422, 13 120, 44 686, 118 096, 674 934, 1 062 880.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anastasia Bredikhina*, GJK Praha 6, *Tereza Černá*, G Praha 9, Litoměřická, *Patrik Čermák*, Nový PORG Praha 4, *Richard Dobíšek*, MG Praha 6, *Viktor Gola*, MG, SZŠ a VOŠ Vsetín, *David Hromádka*, G nad Alejí Praha 6, *Markéta Kalendová*, AG Praha 2, Korunní, *Jindřich Kaplický*, G Čelákovice, *František Koloros*, G Benešov, *Marco Kormanik*, *Petr Němec*, oba WG Ostrava, *Tereza Krejčí* a *Richard Materna*, oba G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Matěj Mach*, G Příbram, *Veronika Mašíčková*, PORG Praha 8, *Nikolas Pippal*, G Olomouc, Hejčín, *Lucian Poljak* a *Lenka Poljaková*, oba GJŠ Přerov, *Kryštof Sedláček*, GE Praha 2, *Jan Slíva*, MG Praha 6, *Patrik Štencel*, MG Opava, *Daniel Viktor Theiss*, G Cheb, *Adam Vašek*, GJB Beroun, *Ondřej Vlk*, DPG Liberec a *Ivan Žemlička*, G Praha 8, Ústavní.

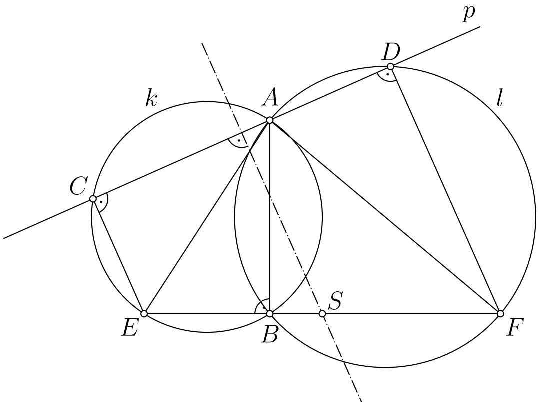
Neúplná řešení zaslali: *David Horčička* a *Tomáš Pazourek*, oba G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Terezie Kladivová*, GAJ Litomyšl a *Marie Zámostná*, GOB a SOŠ Telč.

Úloha 286

Kružnice k, l se protínají v bodech A, B ($A \neq B$). Přímka, která prochází bodem A, protíná tyto kružnice po řadě v bodech C, D ($C \neq A \neq D$). Dokažte, že osy všech úseček CD procházejí společným bodem.

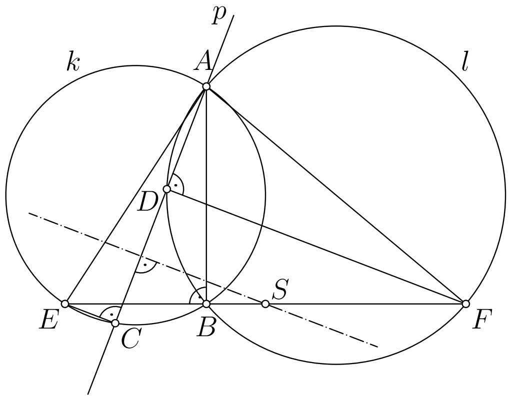
Pavel Leischner

Řešení. Nechť AE je průměrem kružnice k. Podle Thaletovy věty jsou oba úhly ABE a ACE pravé. Podobně nechť AF je průměrem kružnice l. Opět podle Thaletovy věty jsou oba úhly ABF a ADF pravé. Odtud plyne, že oba body E a F leží na kolmici k přímce AB procházející bodem B a tedy body E, B a F leží na téže přímce. Označme S střed úsečky EF.



Obr. 1

Obě přímky CE a DF jsou kolmé k přímce CD, jsou tak rovnoběžné a navíc osa úsečky CD je s nimi rovnoběžná a je i jejich osou, viz obr. 1 a 2. Odtud plyne, že tato osa úsečky CD prochází středem S úsečky EF. Tedy osy všech úseček CD procházejí středem S úsečky EF, kde E a F jsou krajní body průměrů z bodu A po řadě kružnic k a l.



Obr. 2

Jiné řešení. Označme K a L po řadě středy kružnic k a l a uvažujme vrchol S rovnoběžníku $AKSL$. Ukážeme, že pro tento vrchol platí $|CS| = |DS|$, tedy že vrchol S leží na ose (libovolné) úsečky CD. Vzhledem k definici bodů K, L, S platí $|CK| = |AK| = |SL|$, $|AL| = |DL| = |SK|$, tedy trojúhelníky CKS a SLD mají shodné strany CK a SL, resp. KS a LD, dokazovaná rovnost je tak ekvivalentní důkazu shodnosti trojúhelníků CKS a SLD, tedy je ekvivalentní důkazu shodnosti úhlů CKS a DLS.

V situaci podle obr. 3, kdy využijeme faktu, že trojúhelníky AKC a DLA jsou rovnoramenné a body C, A, D leží na jedné přímce, platí

$$\begin{aligned}|\sphericalangle SKA| = |\sphericalangle ALS| = 180^\circ - |\sphericalangle KAL| &= |\sphericalangle DAL| + |\sphericalangle CAK| = \\ &= 90^\circ - \tfrac{1}{2}|\sphericalangle AKC| + 90^\circ - \tfrac{1}{2}|\sphericalangle DLA| = \\ &= 180^\circ - \tfrac{1}{2}(|\sphericalangle AKC| + |\sphericalangle DLA|).\end{aligned}$$

Proto

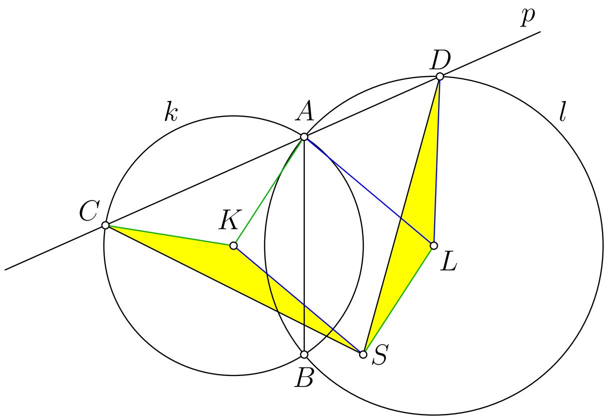
$$\begin{aligned}|\sphericalangle CKS| &= 360^\circ - |\sphericalangle SKA| - |\sphericalangle AKC| = \\ &= 360^\circ - \big(180^\circ - \tfrac{1}{2}(|\sphericalangle AKC| + |\sphericalangle DLA|)\big) - |\sphericalangle AKC| = \\ &= 180^\circ - \tfrac{1}{2}|\sphericalangle AKC| + \tfrac{1}{2}|\sphericalangle DLA|\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}|\sphericalangle DLS| &= |\sphericalangle DLA| + |\sphericalangle ALS| = \\ &= |\sphericalangle DLA| + 180^\circ - \tfrac{1}{2}(|\sphericalangle AKC| + |\sphericalangle DLA|) = \\ &= 180^\circ - \tfrac{1}{2}|\sphericalangle AKC| + \tfrac{1}{2}|\sphericalangle DLA|.\end{aligned}$$

Tedy vnitřní úhly u vrcholů K a L trojúhelníků CKA a DLS jsou shodné, tyto trojúhelníky jsou tak shodné a platí

$$|CS| = |DS|.$$



Obr. 3

V situaci podle obr. 4 opět využijeme faktu, že trojúhelníky AKC a DLA jsou rovnoramenné a body C, A, D leží na jedné přímce, platí tak

$$\begin{aligned}|\sphericalangle SKA| = |\sphericalangle ALS| = 180^\circ - |\sphericalangle KAL| &= 180^\circ - (|\sphericalangle DAL| + |\sphericalangle CAK|) = \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \tfrac{1}{2}|\sphericalangle CKA| + 90^\circ - \tfrac{1}{2}|\sphericalangle ALD|) = \\ &= \tfrac{1}{2}(|\sphericalangle CKA| + |\sphericalangle ALD|).\end{aligned}$$

Proto

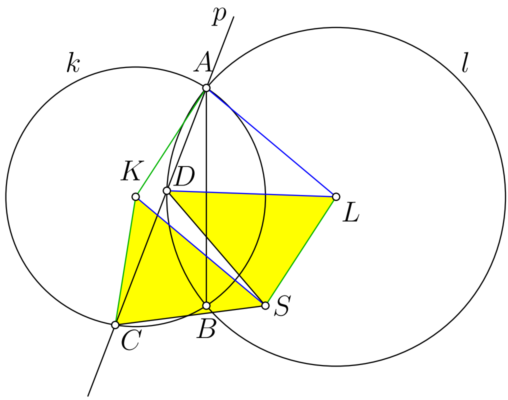
$$\begin{aligned}|\sphericalangle CKS| &= |\sphericalangle CKA| - |\sphericalangle SKA| = |\sphericalangle CKA| - \tfrac{1}{2}(|\sphericalangle CKA| + |\sphericalangle ALD|) = \\ &= \tfrac{1}{2}|\sphericalangle CKA| - \tfrac{1}{2}|\sphericalangle ALD|\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}|\sphericalangle DLS| &= |\sphericalangle ALS| - |\sphericalangle ALD| = \tfrac{1}{2}(|\sphericalangle CKA| + |\sphericalangle ALD|) - |\sphericalangle ALD| = \\ &= \tfrac{1}{2}|\sphericalangle CKA| - \tfrac{1}{2}|\sphericalangle ALD|.\end{aligned}$$

Tedy vnitřní úhly u vrcholů K a L trojúhelníků CKA a DLS jsou shodné, tyto trojúhelníky jsou tak shodné a opět platí

$$|CS| = |DS|.$$



Obr. 4

Správná řešení zaslali: *Radek Bláha*, G České Budějovice, Česká, *Anastasia Bredikhina* a *Helena Muchová*, obě GJK Praha 6, *Tereza Černá*, G Praha 9, Litoměřická, *Patrik Čermák*, Nový PORG Praha 4, *Jakub Hlavenka* a *Tomáš Pazourek*, oba G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *David Hromádka*, G Praha 6, Nad Alejí, *Radim Krška*, *Lucian Poljak* a *Lenka Poljaková*, všichni GJŠ Přerov, *Veronika Menšíková*, AG Praha 2, Korunní, *Nikolas Pippal*, G Olomouc, Hejčín, *Kryštof Sedláček*, GE Praha 2, *Jan Maboušek*, PORG Praha 8, *Štěpán Varhaník*, GJR Chrudim, *Adam Vašek*, GJB Beroun a *Ivan Žemlička*, G Praha 8, Ústavní.

Neúplná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců, *František Jáchim* z Volyně, *Karolína Burdová*, G Jihlava a *Filip Jarolím*, WG Ostrava.

Po uzávěrce minulého čísla ještě redakce obdržela správná řešení úlohy 284 od *Piotra Szatana* z II LO v Tarnovských Horách (Polsko).

Pavel Calábek