Příklad 8

Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ s pravými úhly při vrcholech B a E. Dokažte, že obvod trojúhelníku ACD není menší než $2\,|BE|$.

[Návod. Označme P, Q středy úhlopříček po řadě AC, AD. Ukažte, že délka lomené čáry $BPQE$ je rovna polovině obvodu trojúhelníku ACD.]

Příklad 9 (9. geometrická olympiáda I. F. Šarygina, 2013)

Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ s pravými úhly při vrcholech B a E, v němž $|AB| = |AE|$ a $|BC| = |CD| = |DE|$. Nechť P je průsečík jeho úhlopříček BD a CE. Dokažte, že $|PA| = |AB|$.

Příklad 10 (XVII. MO juniorů – Polsko, 2022, viz [5])

V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ s pravým úhlem při vrcholu D platí $|AC| = |AD|$ a $|BD| = |BE|$. Dokažte, že trojúhelník ABD a čtyřúhelník $ABCE$ mají stejný obsah.

Literatura

[1] *Juklová, L., Švrček, J.*: Pět pěkných příkladů pro pravidelný pětiúhelník. MFI, roč. 31 (2022), č. 1, s. 15–20.

[2] *Kuřina, F.*: Matematika a řešení úloh. Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2011.

[3] *Švrček, J.*: Konstrukce pravidelného pětiúhelníku. Matematika a fyzika ve škole, roč. 16 (1986), č. 8, s. 524–527.

[4] *Vojtěch, J.*: Učebnice geometrie pro IV. třídy středních škol. Knihtiskárna Prometheus, Praha, 6. vydání, 1933.

[5] Olimpiada Matematyczna Juniorów. Dostupné z: https://omj.edu.pl/

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 6. 2024 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 291

Pro trojmístné číslo uvažujme tři součiny všech dvojic číslic tohoto čísla. Určete počet trojciferných čísel, v nichž je aspoň jeden uvedený součin roven aritmetickému průměru zbylých dvou součinů. *Jaroslav Zhouf*

Úloha 292

Určete všechny dvojice (x, y) reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \cos(x-y) \\ \cos(x+y) &= \sin(x-y) \end{aligned}$$

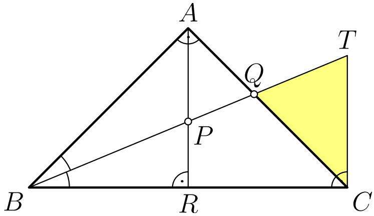
Jaroslav Švrček

Dále uvádíme řešení úloh 287 a 288, jejichž zadání jsme zveřejnili ve třetím čísle loňského (32.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 287

Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou BC. Osa vnitřního úhlu při vrcholu B protíná výšku AR a odvěsnu AC daného trojúhelníku po řadě v bodech P a Q. Dokažte, že $|CQ| = 2|PR|$.

Jaroslav Švrček



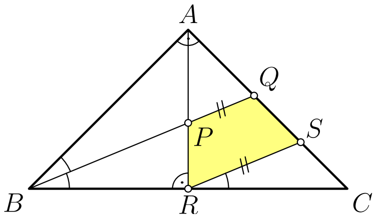
Řešení. Označme T průsečík kolmice k přímce BC procházející bodem C s přímkou BP. Bod R jako pata výšky rovnoramenného trojúhelníku ABC je středem jeho přepony BC.

Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků BRP a BCT se shodným vnitřním úhlem u vrcholu B plyne $|CT| = 2|PR|$. K důkazu rovnosti ze zadání tak stačí ověřit $|CQ| = |CT|$, tedy že trojúhelník QCT je rovnoramenný se základnou QT.

V rovnoramenném pravoúhlém trojúhelníku ABC jsou velikosti vnitřních úhlů u vrcholů B a C rovny $45°$. Jelikož osa úhlu u vrcholu B tento úhel půlí, je velikost úhlu QBC rovna $22{,}5°$ a velikost vnějšího úhlu CQT trojúhelníku BCQ je $45° + 22{,}5° = 67{,}5°$. Z pravoúhlého trojúhelníku BCT platí $|\sphericalangle BTC| = 180° - |\sphericalangle TBC| - |\sphericalangle TCB| = 180° - 22{,}5° - 90° = 67{,}5°$.

Trojúhelník QCT je tak rovnoramenný se základnou QT, což jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Opět jako v předchozím řešení si uvědomíme, že bod R je středem úsečky BC. Nechť RS je střední příčka trojúhelníku BCQ rovnoběžná se stranou BQ. Bod S je středem úsečky CQ a k důkazu rovnosti ze zadání stačí ověřit $|QS| = \frac{1}{2}|CQ| = |PR|$. Což vzhledem k rovnoběžnosti úseček PQ a RS znamená dokázat, že lichoběžník $PRSQ$ je rovnoramenný.



Osa úhlu ABC o velikosti 45° tento úhel půlí, z rovnosti střídavých úhlů QBC a SRC plyne $|\sphericalangle SRC| = 22{,}5°$, tedy $|\sphericalangle SRP| = 90° - 22{,}5° = 67{,}5°$. Podobně velikost vnějšího úhlu QSR u vrcholu S trojúhelníku RCS je $45° + 22{,}5° = 67{,}5°$. Tedy lichoběžník $PRSQ$ je rovnoramenný, což jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Pata R výšky k základně BC v rovnoramenném trojúhelníku ABC je jejím středem, bod R tak je středem přepony BC pravoúhlého trojúhelníku ABC.

Nechť $|BR| = |CR| = |AR| = 1$, potom z Pythagorovy věty plyne $|AB| = |AC| = \sqrt{2}$ a obsah S trojúhelníku ABC je

$$S = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1.$$

Výška v rovnoramenném trojúhelníku je současně osou jeho vnitřního úhlu, bod P jako průsečík os vnitřních úhlů trojúhelníku ABC tak je středem jeho kružnice vepsané a PR jejím poloměrem. Ze známého vzorce pro poloměr kružnice trojúhelníku vepsané platí

$$|PR| = \frac{S}{\frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CA|)} = \frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2})} = \sqrt{2} - 1.$$

Osa vnitřního úhlu trojúhelníku dělí protější stranu v poměru přilehlých odvěsen, platí tak

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AQ|}{|QC|} = \frac{|AC| - |QC|}{|QC|} = \frac{|AC|}{|QC|} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{|QC|} - 1.$$

Odtud snadno dopočteme

$$|QC| = \frac{2}{\sqrt{2}+1} = 2(\sqrt{2}-1) = 2|PR|,$$

což jsme chtěli dokázat.

Poznámka. Z trojúhelníku BPR plyne $\operatorname{tg} 22{,}5^\circ = |PR|/|BR| = \sqrt{2}-1$. Řešitelé, kteří tuto úlohu řešili užitím pravoúhlých trojúhelníků BPR a AQB, získávali uvedenou hodnotu užitím vzorců pro goniometrické funkce polovičního argumentu.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Ľubomír Hajdanka* z Michaloviec, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Piotr Szatan*, II LO v Tarnovských Horách (Polsko), *Zuzana Bárnetová* a *David Schmidt*, oba G U Balvanu, Jablonec nad Nisou, *Anastasia Bredikhina* a *Helena Muchová*, obě GJK, Praha 6, *Tereza Černá*, G, Praha 9, Litoměřická, *Dalibor Englisch*, SPŠEI, Ostrava, *Viktor Gola*, MG, SZŠ a VOŠ Vsetín, *David Hromádka*, G, Praha 6, Nad Alejí, *Erik Ježek* SSPŠ a G, Praha 5, *Markéta Kalendová* a *Veronika Menšíková*, obě AG, Praha 2, Korunní, *Tereza Krejčí*, *Tomáš Pazourek*, *Richard Materna*, všichni G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Terezie Kladivová*, GAJ, Litomyšl, *Lucian Poljak* a *Lenka Poljaková*, oba GJŠ, Přerov, *Jan Slíva*, MG, Praha 6, *Štěpán Varhaník*, GJR Chrudim a *Ivan Žemlička*, G, Praha 8, Ústavní.

Úloha 288

Pro nezáporné reálná čísla x, y uvažujme nerovnost

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1+\sqrt{x+y}} \geq 2\sqrt{2}-2$$

a výraz $V(x,y) = \sqrt{x}+\sqrt{y}$.

a) Najděte množinu M_1 všech možných hodnot výrazu V pro dvojice nezáporných x, y, které vyhovují uvedené nerovnosti.

b) Najděte množinu M_2 všech možných hodnot výrazu V takových, že pro libovolnou dvojici nezáporných reálných čísel x, y, pro kterou $V(x,y) \in$ $\in M_2$, platí uvažovaná nerovnost.

Ján Mazák

Řešení. Označme $V = V(x,y)$ a nerovnost ze zadání ekvivalentně upravme do tvaru, s nímž budeme dále pracovat

$$\sqrt{x+y} \leq \frac{V}{2\sqrt{2}-2} - 1 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}V - 1. \tag{1}$$

a) Užitím nerovnosti mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem máme

$$\frac{V}{2} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} \le \sqrt{\frac{x+y}{2}}, \quad \text{tedy} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} V \le \sqrt{x+y}.$$

Odtud a z (1) dostáváme dále

$$\frac{\sqrt{2}}{2} V \le \sqrt{x+y} \le \frac{\sqrt{2}+1}{2} V - 1.$$

Z nerovnosti mezi prvním a posledním členem snadno dostaneme $V \ge 2$. Protože rovnost v nerovnosti mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem nastává, právě když $x = y$, může výraz V nabýt libovolné hodnoty z množiny $M_1 = \langle 2; +\infty)$.

b) Pokud $y = 0$, má nerovnost (1) tvar

$$\sqrt{x} \le \frac{\sqrt{2}+1}{2} \sqrt{x} - 1,$$

odtud snadno $\sqrt{x} \ge 2(\sqrt{2}+1)$ a tedy nutně i $V \ge 2(\sqrt{2}+1)$. Ukážeme, že pokud pro nezáporná reálná čísla x, y platí $V \ge 2(\sqrt{2}+1)$, pak platí i nerovnost (1).

Nechť $V \ge 2(\sqrt{2}+1)$. Snadnou úpravou dokážeme, že tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$V \le \frac{\sqrt{2}+1}{2} V - 1.$$

Navíc platí

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 2\sqrt{xy}} \le \sqrt{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} = \sqrt{x} + \sqrt{y} = V,$$

což s předcházející nerovností dává (1). Tedy $M_2 = \langle 2(\sqrt{2}+1); +\infty)$.

Správná řešení zaslali *Anastasia Bredikhina* GJK, Praha 6, *Tereza Černá*, G, Praha 9, Litoměřická, *Patrik Čermák*, Nový PORG, Praha 4, *David Hromádka*, G, Praha 6, Nad Alejí, *Erik Ježek*, SSPŠ a G, Praha 5, *Tereza Krejčí*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Jan Slíva*, MG, Praha 6 a *Patrik Štencel*, MG, Opava.

Neúplná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Markéta Kalendová* a *Veronika Menšíková*, obě AG Praha 2, Korunní a *Terezie Kladivová*, GAJ Litomyšl.

Pavel Calábek