

Problémové úlohy ve výuce geometrie

TOMÁŠ ZUŠČÁK

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

1. Úvod

Současné pojetí matematiky na střední škole je ovlivněno přístupem, který by se dal nazvat přístupem „strukturálním“. Dílčí oblasti matematiky jsou představovány jako struktury, které mají vlastní obsah a disponují určitým okruhem úloh a metod jejich řešení. Stejně probíhá i výuka geometrie v oblastech planimetrie, stereometrie, goniometrie a analytická geometrie.

To přináší bezesporu své výhody, má to však i určitý nedostatek. Matematiku bychom neměli vnímat jako studium dílčích matematických struktur, ale spíše jako nástroj k řešení problémů. Není z hlediska kvalitního matematického vzdělávání dobré, aby metoda řešení úlohy byla a priori určena tím, v které kapitole učiva se nachází. To ostatně ukázala i živá diskuse nad podobou těžší verze maturitního testu z matematiky v roce 2012. Vhodnější by bylo snažit se koncipovat školskou matematiku problémově. To ovšem nevylučuje nutnost probírat teoretické úseky matematiky včetně dílčích metod řešení typových úloh, protože pouze jejich kvalitní zvládnutí je předpokladem úspěšného uplatnění při řešení problému.

Představení matematiky jako nástroje k řešení problému je možné i za současného stavu. V případě geometrie nestačí pouze úlohu jedním způsobem vyřešit. Je třeba snažit se úlohu řešit různými způsoby, hledat inspiraci z jednoho přístupu k řešení úlohy k řešením dalším, spojovat početní řešení s přístupy konstruktivními, hledat řešení jednodušší a všimát

si podnětů, které přináší úloha k dalšímu rozvinutí problému, případně k obohacení teorie.

2. Formulace problému

Učitel matematiky, který by uplatňoval tento přístup, musí pochopitelně disponovat souborem vhodných problémů. V dalším textu to ukážeme na jedné vybrané úloze.

Úloha 1

V trojúhelníku ABC platí (při obvyklém označení délek jeho stran a velikostí vnitřních úhlů) $\alpha = 2\beta$. Vyjádřete délku strany a pomocí délek stran b, c ¹.

První řešení úlohy 1. Předpokládejme, že trojúhelník daných vlastností existuje. Podle sinové věty platí

$$\frac{a}{\sin 2\beta} = \frac{b}{\sin \beta}, \text{ odtud plyne } a = 2b \cos \beta, \text{ tj. } \cos \beta = \frac{a}{2b}. \quad (1)$$

Podle kosinové věty můžeme psát:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 2\beta, \text{ tj. } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(2 \cos^2 \beta - 1) \quad (2)$$

Dosadíme ze vztahu (1) do (2), obdržíme po úpravě

$$a = \sqrt{b(b+c)}. \quad (3)$$

Řešení této úlohy nám nabízí vhodný prostor pro procvičení a propojení základních vět trigonometrie a goniometrických vztahů. Nemusíme se však omezit pouze na budování dílčí oblasti matematiky (v tomto případě goniometrie). Tvar výsledku nás může podnítit k formulaci dalšího problému. Vztah (3) je možno využít mj. k sestrojení délky strany a uvažovaného trojúhelníku ABC pomocí délek jeho stran b a c .

Úloha 2

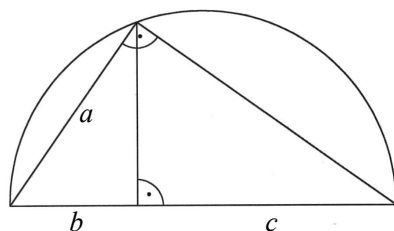
Sestrojte trojúhelník ABC , jsou-li dány délky jeho stran b a c a je-li velikost jeho vnitřního úhlu α dvojnásobkem velikosti vnitřního úhlu β tohoto trojúhelníku.

¹viz [1], str. 157, úloha č. 64.

Tato úloha nezapadá do běžného rámce konstruktivních úloh o trojúhelníku, které jsou studenti zvyklí řešit – představuje pro ně problém. Pokud jsou navíc navyklí zařadit si úlohu do určité oblasti matematiky (v tomto případě planimetrie), navádí je zadání ke snaze nalézt řešení metodami „syntetické geometrie“. Tak se může stát úloha pro řadu z nich neřešitelnou. Pokud však překročíme (možná umělé) hranice mezi strukturami dílčích poznatků a metod, otevřou se nám možnosti, které nás dovedou k zajímavým řešením této úlohy.

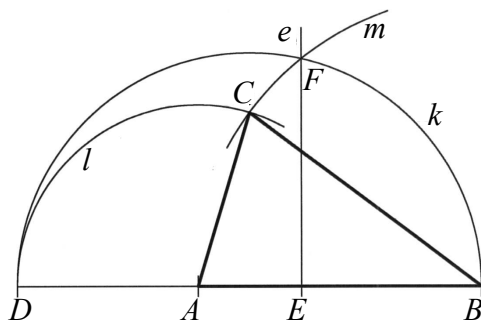
3. Využití početního řešení úlohy 2

První řešení úlohy 2 – na základě využití Eukleidovy věty o odvěsně (obr. 1).



Obr. 1

Můžeme tak dospět k následující konstrukci (obr. 2).



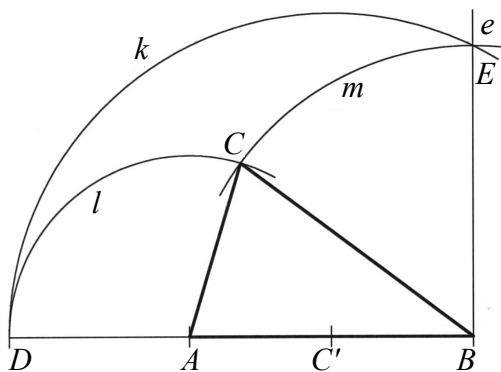
Obr. 2

Sestrojíme úsečku AB o délce c a na polopřímce BA bod E ve vzdálenosti b od bodu B . Dále sestrojíme na polopřímce opačné k polopřímce AB bod D ve vzdálenosti b od bodu A . Sestrojíme kružnici k nad průměrem DB a v bodě E vztyčíme kolmici e k přímce AB . Průsečík přímky e a kružnice k označíme F . Zřejmě $|BF| = a$. Konstrukce trojúhelníku ABC je dále již zřejmá.

Druhé řešení úlohy 2. S ohledem na vztah (1) můžeme úsečku o délce a chápat jako střední geometrickou úměrnou úseček o délkách b a $b + c$. Její určení není nutně postaveno na užití Eukleidových vět. Upravíme-li vztah (3), dostaneme

$$a^2 = b^2 + bc = \left(b + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2}{4}.$$

Úsečku o délce a můžeme tedy sestrojit jako odvěsnu pravoúhlého trojúhelníku o druhé odvěsně délky $\frac{c}{2}$ a přeponě velikosti $(b + \frac{c}{2})$. To nás vede k následující konstrukci (obr. 3).



Obr. 3

Sestrojíme úsečku AB o délce c a její střed C' . Na polopřímce opačné k polopřímce AB sestrojíme bod D ve vzdálenosti b od A . V bodě B vztyčíme kolmici e k přímce AB . Sestrojíme kružnici k se středem C' , která prochází bodem D . Označíme E průsečík přímky e a kružnice k . Protože $|C'E| = b + \frac{c}{2}$ a $|BC'| = \frac{c}{2}$, zjevně platí $|BE| = a$. Konstrukce trojúhelníku ABC je již zřejmá.

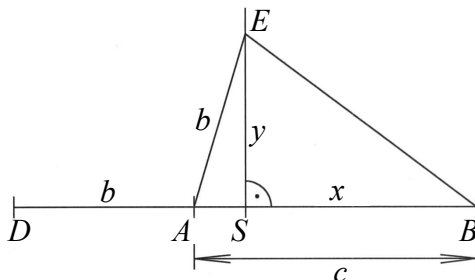
Třetí řešení úlohy 2 je opět postaveno na úpravách vztahu (3). Platí

$$a^2 = b^2 + bc = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + b^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2.$$

Označme dále

$$x = \sqrt{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}, \quad y = \sqrt{b^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2}$$

(za předpokladu, že výraz pod druhou z odmocnin je kladný). Vidíme, že délku strany a můžeme sestrojít jako přeponu pravoúhlého trojúhelníku o odvěsnách délek x a y . Uvažujme úsečku AB o délce c a bod D na opačné polopřímce k polopřímce AB ve vzdálenosti b od bodu A . Střed úsečky BD označme S . Na ose úsečky BD leží bod E ve vzdálenosti b od bodu A (obr. 4).



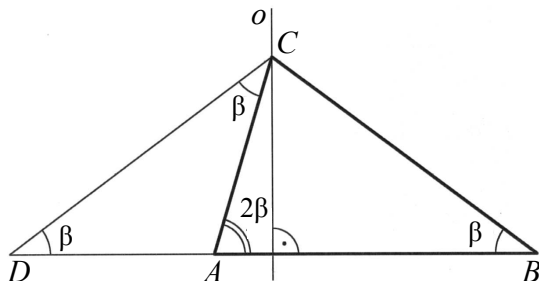
Obr. 4

Platí $|SB| = (b+c)/2 = x$, $|AS| = |c - (b+c)/2| = |(c-b)/2|$. Protože $|AE| = b$, je $|SE| = y$ (bod E tedy existuje, je-li splněn výše uvedený předpoklad), a protože $|SB| = x$, je $|BE| = a$. Vzhledem k tomu, že $|AE| = b$ a $|BE| = a$, je bod E totožný s vrcholem C hledaného trojúhelníku ABC . Odtud již plyne jednoduché řešení úlohy 2.

4. Ryze syntetická řešení úlohy 2

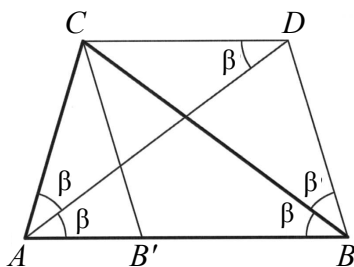
Čtvrté řešení úlohy 2. Zde si můžeme všimnout, že společným rysem všech tří řešení je užití úsečky BD o velikosti $b+c$. Využijme ji při rozboru úlohy 2. Předpokládejme, že hledaný trojúhelník ABC existuje. Na

přímce AB určíme bod D podobně jako v předchozích úvahách (obr. 5). Trojúhelník ACD je rovnoramenný se základnou CD . Vnitřní úhly trojúhelníka ACD při vrcholu C a D jsou shodné a součet jejich velikostí je roven velikosti vnějšího úhlu trojúhelníka ACD při vrcholu A , tj. 2β . Odtud vidíme, že úhel CDA má velikost β a je tak shodný s úhlem ABC . Trojúhelník BCD je tudíž rovnoramenný se základnou BD . Proto bod C leží na ose úsečky BD . Odtud plynoucí konstruktivní řešení úlohy 2 je zřejmé.

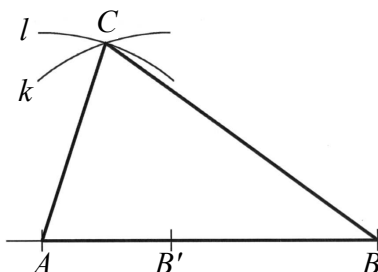


Obr. 5

Páté řešení úlohy 2. Předpokládejme, že hledaný trojúhelník ABC existuje. Obraz bodu C v osové souměrnosti podle osy úsečky AB označíme D (obr. 6). Je-li $b = c$, je čtyřúhelník $ABCD$ čtverec. Potom je ABC pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník se shodnými odvěsnami AB a AC délky b a jeho konstrukce je zřejmá.



Obr. 6



Obr. 7

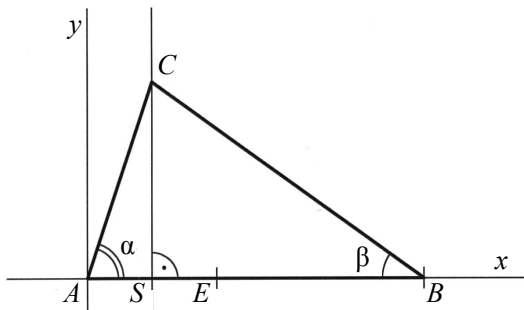
Pokud je $b \neq c$, je čtyřúhelník $ABDC$ rovnoramenný lichoběžník, jehož úhlopříčky jsou zároveň osami jeho vnitřních úhlů při vrcholech

A a B . Protože jsou úhly BAD a ADC shodné, jsou shodné i úhly CAD a ADC . Trojúhelník ACD je proto rovnoramenný se základnou AD a úsečky AC a CD jsou shodné. Úloha 2 pak souvisí s elementární úlohou, kdy máme sestrojít lichoběžník, u něhož známe délky všech čtyř stran ($|AB| = c$, $|BD| = |CD| = |AC| = b$). Proto obrázek doplníme o kosočtverec $B'BDC$.

Tyto úvahy nás opravňují ke konstrukci trojúhelníku ABC , je-li $b \neq c$ (obr. 7). Sestrojíme úsečku AB o délce c . Na polopřímce BA sestrojíme bod B' ve vzdálenosti b od bodu B . Sestrojíme kružnice k , resp. l , se středy A , resp. B' a poloměrech b . Jejich průsečíkem je vrchol C hledaného trojúhelníku ABC .

5. Analytické řešení úlohy 2

Šesté řešení úlohy 2. Předpokládejme, že existuje trojúhelník ABC , který vyhovuje podmínkám úlohy 2. Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic tak, že bod A leží v jejím počátku a bod B leží v kladné části osy x . Potom pro souřadnice bodů platí: $A[0; 0]$, $B[c; 0]$, souřadnice hledaného bodu C označíme i a j , tj. $C[i, j]$ (obr. 8).



Obr. 8

Pak platí

$$\cos \alpha = \frac{i}{b}, \quad \cos \beta = \frac{c-i}{\sqrt{(c-i)^2 + j^2}}.$$

Protože $\cos^2 \beta = (1 + \cos \alpha)/2$ a $i^2 + j^2 = b^2$, můžeme psát

$$\frac{(c-i)^2}{c^2 - 2ci + b^2} = \frac{b+i}{2b}.$$

Odtud vyplývá

$$2i^2 - (b + c)i + b(c - b) = 0.$$

Pro kořeny této rovnice platí

$$i_{1,2} = \frac{b + c \pm \sqrt{(b + c)^2 - 8b(c - b)}}{4} = \frac{b + c \pm \sqrt{9b^2 - 6bc + c^2}}{4}.$$

Bez ohledu na znaménko výrazu $3b - c$ je hledaná 1. souřadnice rovna některému z těchto dvou (ne nutně různých) čísel

$$i = \frac{b + c + (3b - c)}{4} = b \quad \text{nebo} \quad i = \frac{b + c - (3b - c)}{4} = \frac{c - b}{2}.$$

Protože $j \neq 0$ a dále $i^2 + j^2 = b^2$, musí být $|i| < b$. Proto je

$$i = \frac{c - b}{2}$$

Bod C tak leží na přímce o rovnici $x = \frac{1}{2}(c - b)$. Ta je kolmá k přímce AB (ose x) a protíná ji v bodě S o souřadnicích $[\frac{1}{2}(c - b), 0]$. Konstrukce trojúhelníka ABC je dále již zřejmá.

Odtud je patrné, že tento (v podstatě) mechanický výpočet odkryl řešení, ke němuž bychom jinak potřebovali jistý nápad a dávku geometrické představivosti (viz 4. a 5. řešení této úlohy). V tom lze spatřovat velkou sílu snahy nalézt řešení konstruktivní úlohy užitím jistého kalkulu tak, jak to na složitějších úlohách lze vidět např. v [1].

6. Závěr

Závěr plynoucí z výše uvedených úvah a řešení by mohl být následující. Pokud zařadíme příslušnou úlohu do určité oblasti matematiky (v našem případě do trigonometrie, planimetrie, analytická geometrie ...), může se stát, že si uzavíráme cestu k jiným oblastem matematiky, které nám nabízejí podstatně jednodušší řešení. A to platí i o řešení úlohy 1. Vztah mezi řešeními úloh 1 a 2 není totiž pouze jednostranný ve smyslu, že řešení úlohy 1 může pomoci při řešení úlohy 2. Myšlenky vedoucí k řešení úlohy 2 metodami syntetické geometrie mohou také pomoci při nalezení elegantního řešení úlohy 1.

Druhé řešení úlohy 1. Uvažujme čtvrté řešení úlohy 2 (obr. 5). Z toho, co bylo výše uvedeno, je navíc patrné, že jsou trojúhelníky DBC a DCA

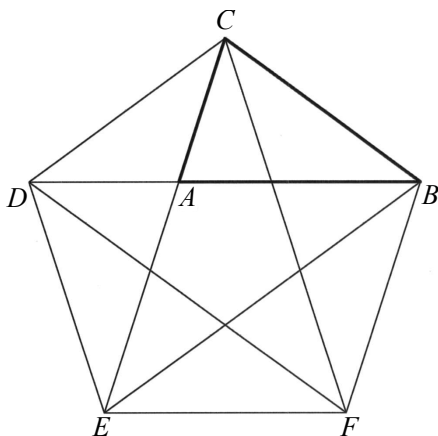
podobné. Proto platí

$$\frac{|DC|}{|DA|} = \frac{|DB|}{|DC|}, \quad \text{tj.} \quad \frac{a}{b} = \frac{c+b}{a}.$$

Odtud

$$a = \sqrt{b(b+c)}.$$

Konečně jsme zcela pominuli další souvislosti řešené úlohy. Např. rovno-ramenný trojúhelník ABC , ve kterém platí: $\alpha = 2\beta$, je částí pravidelného pětiúhelníku (viz obr. 9). Existuje zde tudíž i zřejmá souvislost se *zlatým řezem* (poměrem).



Obr. 9

Literatura

- [1] *Kuřina, F.*: Deset pohledů na geometrii. MÚ AV ČR, Praha, 1996.
- [2] *Zuščák, T.*: Jan Sobotka – inspirace po stu letech (disertační práce), Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha, 2008.
- [3] *Sobotka, J.*: O některých relacích metrických a jejich užití k analytickému řešení problému Apollonického. ČPMF, roč. 41 (1912), s. 487-500.
- [4] *Sobotka, J.*: Dodatky k analytickým úvahám o kružnicích a koulích Apolloniových a isogonálních. Rozpravy, roč. 21 (1912), č. 12.

Součet nekonečné řady aritmeticko-geometrické

EMIL CALDA

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Nekonečnou aritmeticko-geometrickou řadou nazýváme řadu

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb_k + \dots,$$

jejíž člen a_kb_k je pro všechna přirozená čísla k součinem k -tého členu aritmetické posloupnosti $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ a k -tého členu posloupnosti geometrické $b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$.

Jestliže aritmetická posloupnost má diferencí d a kvocient posloupnosti geometrické je q , pro k -tý člen aritmeticko-geometrické řady platí

$$a_kb_k = (a_1 + (k-1)d)b_1q^{k-1}.$$

Abychom odvodili součet s této nekonečné řady, určíme nejprve součet s_n jejích prvních n členů, a to pro $q \neq 1$:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n a_kb_k = \sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d)b_1q^{k-1} = \\ &= a_1b_1 \sum_{k=1}^n q^{k-1} + b_1d \sum_{k=1}^n (k-1)q^{k-1} = \\ &= a_1b_1(1-q^n)/(1-q) + b_1d \sum_{k=0}^{n-1} kq^k. \end{aligned}$$

K určení součtu $\sum_{k=0}^{n-1} kq^k$ vytvoříme rozdíl $S-qS$, v němž použijeme rovnosti

$$\sum_{k=0}^{n-1} kq^k = \sum_{k=1}^{n-1} kq^k$$

$$qS = \sum_{k=0}^{n-1} kq^{k+1} = \sum_{k=1}^n (k-1)q^k = \sum_{k=1}^{n-1} (k-1)q^k + (n-1)q^n,$$

takže

$$\begin{aligned} S - qS &= \sum_{k=1}^{n-1} (kq^k - (k-1)q^k) - (n-1)q^n = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} q^k - (n-1)q^n = \frac{q(1-q^{n-1})}{1-q} - q^n(n-1), \end{aligned}$$

odtud (za předpokladu $q \neq 1$) vypočteme

$$S = \frac{q(1-q^{n-1})}{(1-q)^2} - q^n(n-1)/(1-q).$$

Pro součet s_n prvních n členů aritmeticko-geometrické řady tak dostáváme:

$$s_n = a_1 b_1 (1 - q^n) / (1 - q) + b_1 d [q(1 - q^{n-1}) / (1 - q)^2 - q^n (n - 1) / (1 - q)].$$

Součet dané nekonečné řady získáme tak, že určíme limitu s_n pro n jdoucí do nekonečna:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n &= [a_1 b_1 / (1 - q)] \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^n) + [b_1 d q / (1 - q)^2] \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^{n-1}) - \\ &\quad - [b_1 d / (1 - q)] \lim_{n \rightarrow \infty} (n q^n - q^n). \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že pro $|q| < 1$ platí jednak $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ (viz např. [1]), jednak $\lim_{n \rightarrow \infty} n q^n = 0$ (viz závěr tohoto článku), platí za předpokladu $|q| < 1$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a_1 b_1 / (1 - q) + b_1 d q / (1 - q)^2.$$

Odvodili jsme tak následující výsledek:

Věta 1

Pro součet s nekonečné aritmeticko-geometrické řady $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k + \dots$ utvořené ze členů posloupnosti aritmetické (s prvním členem

a_1 a diferencí d) a geometrické (s prvním členem b_1 a kvocientem q , kde $|q| < 1$), platí

$$s = a_1 b_1 / (1 - q) + b_1 d q / (1 - q)^2.$$

Jak jsme slíbili výše, ukážeme nyní, že pro $|q| < 1$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$. Za tímto účelem dokážeme nejprve větu:

Věta 2

Pro každou posloupnost (a_n) platí: Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Z předpokladu, že platí negace této věty, odvodíme spor. Nechť tedy existuje posloupnost (a_n) , v níž $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$ a zároveň $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, je i $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0$, takže lze použít větu o podílu limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} (|a_{n+1}|/|a_n|) = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}| / \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|.$$

Protože však $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$, je $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}| / \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$, což je ve sporu s tím, že tato limita je podle předpokladu menší než jedna; tím je daná věta dokázána. Jejím užitím snadno dokážeme, že pro všechna $|q| < 1$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$.

Protože pro $q = 0$ věta platí, budeme předpokládat, že je $|q| < 1$ a $q \neq 0$. Dostaneme tak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(n+1)q^{n+1}/nq^n| = |q(n+1)/n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |q(n+1)/n| = |q| < 1,$$

což podle výše uvedené věty znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$.

Autor doufá, že výše uvedené řádky poslouží k tomu, aby se nadaní studenti dověděli z matematiky více, než je na střední škole běžné.

Literatura

- [1] *Odvárko, O.*: Matematika pro gymnázia, Posloupnosti a řady, Prometheus, Praha 1995.

Různé způsoby dokazování nerovností v geometrii

PAVEL PECH

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Rozvoj nových technologií ovlivňuje způsob výuky matematiky na školách různých typů a úrovní. Matematický software jako např. systémy dynamické geometrie (DGS) a systémy počítačové algebry (CAS) velmi významně zasahuje, kromě jiného, do problematiky dokazování matematických vět. Pomocí DGS můžeme provádět verifikaci a vizualizaci geometrických tvrzení. Jedná se o důkazové metody, které jsou založené na numerických výpočtech, a které ve své podstatě ani matematickými důkazy nejsou. Nicméně se ukazuje jejich užitečnost zejména ve výuce matematiky. Naproti tomu pomocí CAS, které jsou založeny na symbolických výpočtech, jsme schopni provádět exaktní matematické důkazy.

V tomto příspěvku ukážeme několik způsobů dokazování známé Weitzenböckovy nerovnosti – od verifikace v DGS, počítačového a klasického důkazu, po vizuální důkaz. Obzvláště vizuální důkaz je pak velmi efektivní.

Věta 1 (Weitzenböckova nerovnost [7])

Je dán trojúhelník ABC se stranami délek a, b, c o obsahu P . Potom platí

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3} P \geq 0, \quad (1)$$

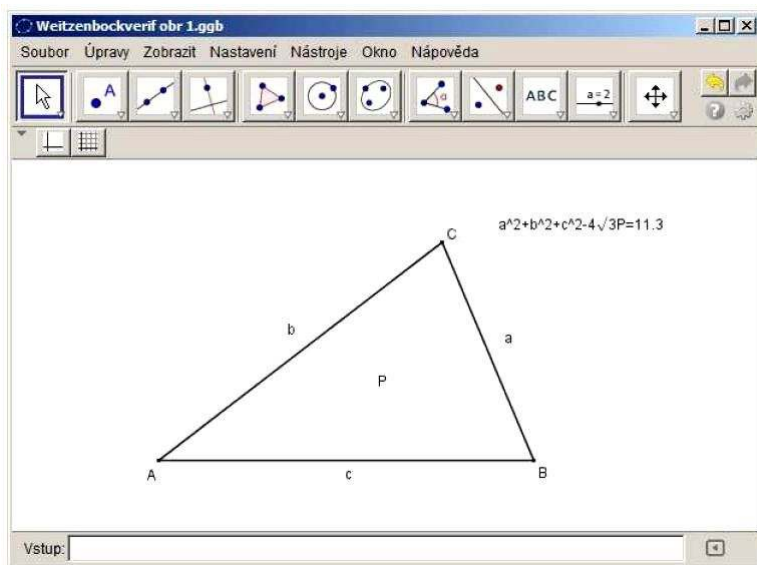
přičemž rovnost platí, právě když ABC je rovnostranný trojúhelník.

V příspěvku uvedeme následující čtyři různé důkazy (ověření) výše uvedené nerovnosti:

- a) Verifikace pomocí dynamického softwaru,
- b) Automatický (počítačový) důkaz,
- c) Klasický důkaz,
- d) Vizuální důkaz.

ad a) *Verifikace pomocí dynamického softwaru* se provádí tak, že trojúhelník ABC nakresíme např. v programu GeoGebra a vyjádříme hodnotu levé strany nerovnosti (1), (obr. 1). Měníme-li tvar trojúhelníku ABC , hodnota levé strany (1) zůstává stále nezáporná.

Je zřejmé, že tuto metodu nelze brát jako matematický důkaz, i když lze říci, že s vysokou pravděpodobností tvrzení platí. Pro práci se studenty má však tato metoda kromě jiného především motivační význam.



Obr. 1 Verifikace v DGS

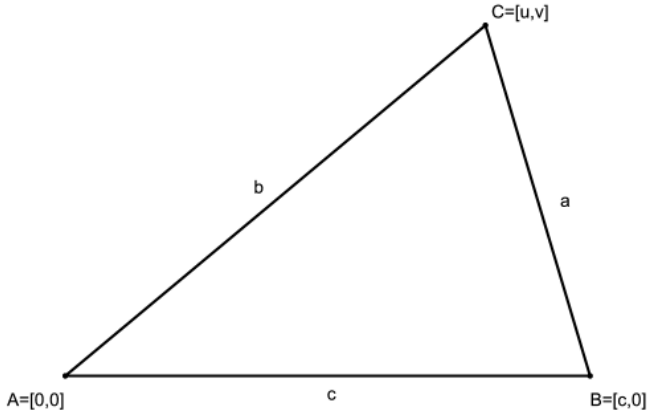
ad b) *Automatický (počítačový) důkaz* spočívá v analytickém vyjádření levé strany (1) ve tvaru polynomu a jeho následné úpravě na takový tvar, ze něhož je zřejmá jeho nezápornost.

Nejprve zavedeme kartézskou soustavu souřadnic tak, že vrcholy trojúhelníku ABC mají souřadnice $A = [0, 0]$, $B = [c, 0]$, $C = [u, v]$ (obr. 2). Dále vyjádříme délky stran a, b :

$$a = |BC| \Rightarrow (u - c)^2 + v^2 - a^2 = 0,$$

$$b = |CA| \Rightarrow u^2 + v^2 - b^2 = 0.$$

Pro obsah P trojúhelníku ABC pak platí $P - \frac{1}{2}cv = 0$.



Obr. 2 Automatický důkaz — zavedení soustavy souřadnic

Nyní vyjádříme levou stranu nerovnosti (1) pomocí shora uvedených vztahů. Platí

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}P = (u - c)^2 + v^2 + u^2 + v^2 + c^2 - 2\sqrt{3}cv.$$

Následující úpravou

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}P = 2\left(u - \frac{c}{2}\right)^2 + 2\left(v - \frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad (2)$$

vyjádříme nerovnost (1) na tvar, z něhož evidentně plyne dokazovaná nerovnost. Rovnost zde nastává, právě když platí $u = c/2$ a současně $v = c\sqrt{3}/2$, tj. právě když trojúhelník ABC je rovnostranný.

V obecném případě je „početní“ vyjádření polynomu na levé straně nerovnosti ve tvaru součtu druhých mocnin – podobně jako v případě (2) – prakticky nemožné. Proto hovoříme o automatickém nebo též počítačovém důkazu. Rozklad na součet druhých mocnin provede počítač (je-li to možné) za nás, viz např. [4], [5].

ad c) *Klasický důkaz* nerovnosti (1), který zde uvádíme, je založen na nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (tzv. AG-nerovnost) a na známé Cauchy–Schwarzově nerovnosti.

Nejprve upravíme (1) s použitím Heronova vzorce na ekvivalentní tvar

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c). \quad (3)$$

Nerovnost (1) budeme dokazovat ve tvaru (3).

Užití AG nerovnosti dává

$$3(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) \leq \frac{3}{27}(a + b + c)(a + b + c)^3$$

a tedy

$$3(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) \leq \frac{(a + b + c)^4}{9}.$$

Užitím Cauchy–Schwarzovy nerovnosti pak důkaz dokončíme

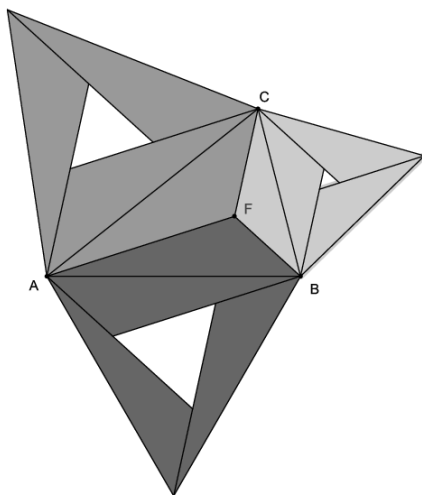
$$\frac{(a + b + c)^4}{9} = \left(\frac{(a + b + c)^2}{3}\right)^2 \leq \left(\frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{3}\right)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2. \quad (4)$$

Rovnost v (1) platí, právě když nastane rovnost v (3) a (4). Taková situace nastane, právě když $a = b = c$, tj. právě když je trojúhelník ABC rovnostranný.

ad d) *Vizuální důkaz* spočívá ve vhodném geometrickém znázornění nerovnosti (1), z něhož plyne bezprostředně její důkaz. Takové typy důkazů jsou známy např. z publikace [3]. Pro důkaz naší nerovnosti je klíčové následující vyjádření nerovnosti (1) ve tvaru součtu obsahů rovnostranných trojúhelníků, které jsou vně sestrojeny nad stranami trojúhelníku ABC , přičemž budeme dokazovat ekvivalenci variantu dané nerovnosti, viz následující vztah.

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}P \Leftrightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{c^2\sqrt{3}}{4} \geq 3P.$$

Rozdělíme-li trojúhelník ABC na tři části s pomocí jeho Fermatova bodu² F . S přihlédnutím k rozdělení trojúhelníku ABC pomocí bodu F a rovněž vně připsaných rovnostranných trojúhelníků, dostaneme (obr. 3). Měníme-li tvar trojúhelníku ABC , je součet obsahů rovnostranných trojúhelníků sestavených nad jeho stranami větší nebo roven $3P$. „Mezery“ ve tvaru rovnostranných trojúhelníků „zmizí“ pouze v případě, když je trojúhelník ABC rovnostranný, viz [1], [2]. Na adresách [1] nebo [2] lze nalézt obr. 3 v interaktivní podobě.



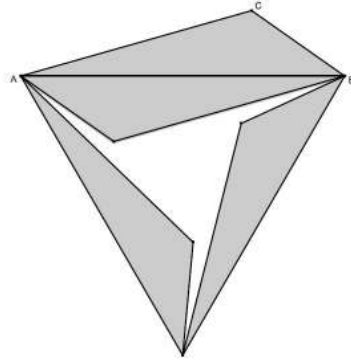
Obr. 3 Vizuální důkaz nerovnosti $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}P$

Pokud je trojúhelník ABC tupouhý s úhlem větším nebo rovným 120° , obr. 3 situaci neřeší. Skutečně, označíme-li obsahy rovnostranných trojúhelníků nad stranami a, b, c trojúhelníku ABC postupně P_a, P_b a P_c , potom

$$P_a + P_b + P_c \geq P_c \geq 3P.$$

Nerovnost (1) je pro $n = 3$ speciálním případem následující nerovnosti, která náleží do třídy tzv. nerovností izoperimetrického typu.

²Fermatův bod je takový bod, z něhož vidíme všechny tři strany trojúhelníku ABC pod úhlem velikost 120° .



Obr. 4 Vizualní důkaz (1) je-li jeden úhel větší nebo roven 120°

Věta 2

V rovině je dán n -úhelník A_1, A_2, \dots, A_n se stranami délek a_1, a_2, \dots, a_n o obsahu P . Potom platí

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} P \quad (5)$$

s rovností pro pravidelný n -úhelník.

Pro $n = 4$ má nerovnost (5) následující tvar

Věta 3

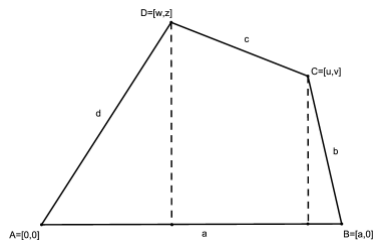
V rovině je dán čtyřúhelník $ABCD$ o stranách délek a, b, c, d o obsahu P . Potom platí

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 4P \geq 0, \quad (6)$$

přičemž rovnost nastane, právě když čtyřúhelník $ABCD$ je čtverec.

Při důkazu nerovnosti (6) můžeme postupovat stejně jako v případě trojúhelníku, kdy provedeme verifikaci v DGS, automatický důkaz, klasický důkaz a končeně i důkaz vizuální. Verifikaci v DGS a klasický důkaz nebudeme uvádět, čtenář si je snadno provede sám. Zde uvedeme pouze automatický a vizuální důkaz.

Automatický důkaz. Zavedeme pravoúhlou soustavu souřadnic tak, že vrcholy čtyřúhelníku $ABCD$ mají souřadnice $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [u, v]$, $D = [w, z]$,



Obr. 5 Automatický důkaz, případ $n = 4$

$$\begin{aligned}
 b &= |BC| \Rightarrow (u - a)^2 + v^2 - b^2 = 0, \\
 c &= |CD| \Rightarrow (w - u)^2 + (z - v)^2 - c^2 = 0, \\
 d &= |DA| \Rightarrow w^2 + z^2 - d^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Pro obsah P čtyřúhelníku $ABCD$ dále platí $P - \frac{1}{2}(-va + vw - zu) = 0$, jak lze snadno odvodit, rozdělíme-li čtyřúhelník $ABCD$ na dva pravoúhlé trojúhelníky a lichoběžník, viz např. obr. 5 nebo (pro pokročilejší) obsah P získáme jako součet obsahů trojúhelníků ABC a ACD pomocí determinantů. Přepíšeme-li levou stranu nerovnosti (6) pomocí shora uvedených vztahů, dostaneme rovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 4P = \quad (7)$$

$= a^2 + (u - a)^2 + v^2 + (w - u)^2 + (z - v)^2 + w^2 + z^2 + 2(-va + vw - zu)$, kterou lze zapsat jako součet druhých mocnic následujícím způsobem

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 4P = \quad (8)$$

$$= (u - w - a)^2 + (v - a + w)^2 + (z - v)^2 + (z - u)^2.$$

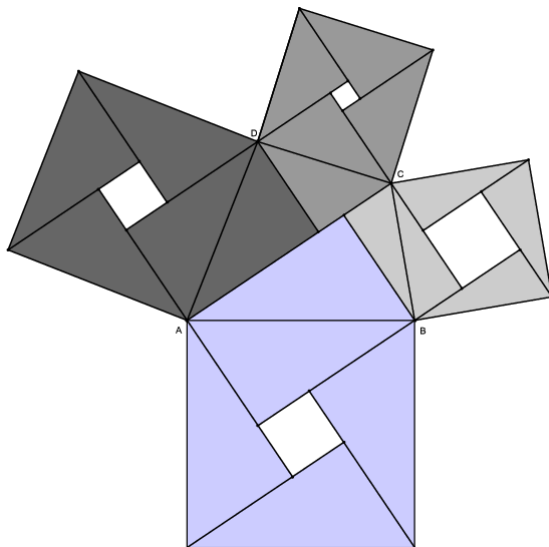
Z vyjádření (8) plyne nerovnost (6).³ Rovnost zde nastává, právě když současně platí

$$u - w - a = 0, \quad v - a + w = 0, \quad z - v = 0, \quad z - u = 0.$$

Odtud $u = v = z$ a $w = 0$, tj. právě když čtyřúhelník $ABCD$ je čtverec.

³Důkaz o nezápornosti pravé strany v rovnosti (7) dostaneme také pomocí programu tds [8].

Vizuální důkaz vyžaduje více tvůrčí invence. Je uveden např. v [6] a je (podobně jako v případě trojúhelníka) velmi přesvědčivý. Čtyřúhelník $ABCD$ rozdělíme na čtyři části, viz obr. 5. Součet obsahů čtverců sestavených nad stranami čtyřúhelníku $ABCD$ je vždy větší nebo roven $4P$. „Mezery“ ve tvaru čtverců „zmizí“, právě když $ABCD$ je čtverec, tj. právě když v (6) nastává rovnost.



Obr. 6 Vizuální důkaz nerovnosti $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4P$

Pro případy, kdy $n \geq 5$, je možno zkonstruovat vizuální důkaz jen pro některé speciální typy n -úhelníků. Např. pro pětiúhelník, v němž existuje bod, z něhož vidíme každou jeho stranu pod úhlem 72° lze vizuální důkaz, analogický případům $n = 3; 4$, provést. Konstrukce vizuálních důkazů pro libovolné n -úhelníky pro $n \geq 5$ však není známa.

Literatura

- [1] *Alsina, C. – Nelsen, R.*: When less is more: Visualizing Basic Inequalities. MAA, Washington, 2009.
- [2] <http://www.cut-the-knot.org/geometry.shtml>

- [3] <http://www.geogebraTube.org/student/m30425>
- [4] *Nelsen, R.*: Proofs without words. MAA, Washington, 1993.
- [5] *Parrilo, P. A.*: Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization. PhD. thesis. California Institute of Technology, Pasadena, California, 2000.
- [6] *Pech, P.*: O jedné metodě dokazování geometrických nerovností. Matematika-fyzika-informatika 18 (2009), 452–458.
- [7] *Weitzenböck, R.*: Math. Zeitschrift 5 (1919), 137–146.
- [8] *Yang, L.*: Difference substitution and automated inequality proving. Journal of Guangzhou Univ., Natural Science Edition 5(2) (2006), 1–7.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojice úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 12. 2013 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v \TeX ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 197

Dokažte, že pro libovolné liché číslo n je $20n^4 + 14n^2 + 2014$ dělitelné šestnácti.

Martin Panák

Úloha 198

Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dán vrchol A , průsečík výšek V a střed T_A strany BC . Přitom předpokládejme, že A , V , T_A jsou tři navzájem různé body.

Šárka Gergelitsová

Dále uvádíme řešení úloh 191 a 192, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním čísle tohoto (22.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 191

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$(a + b + c)^3 = 3e,$$

$$(b + c + d)^3 = 3a,$$

$$(c + d + e)^3 = 3b,$$

$$(d + e + a)^3 = 3c,$$

$$(e + a + b)^3 = 3d.$$

Jaroslav Švrček

Řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a = \max\{a, b, c, d, e\}$. Potom $3e \leq 3a$. Z první a druhé rovnice dané soustavy plyne

$$(a + b + c)^3 = 3e \leq 3a = (b + c + d)^3.$$

Odtud dostaneme $a + b + c \leq b + c + d$, tedy $a \leq d$. Proto $a = d = \max\{a, b, c, d, e\}$. Ze čtvrté a páté rovnice soustavy stejným způsobem dostaneme $d = b$. Ze druhé a třetí rovnice dále získáme $b = e$ a nakonec z první a poslední rovnice $c = e$. Proto $a = b = c = d = e$.

Dosazením $a = b = c = d = e$ do libovolné rovnice dané soustavy dostaneme $(3a)^3 = 3a$. Tato rovnice má tři reálné kořeny $a \in \{-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\}$. Řešením dané soustavy rovnic jsou tedy tři uspořádané pětičky reálných čísel

$$(a, b, c, d, e) \in \left\{ \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3} \right), (0; 0; 0; 0; 0), \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right) \right\}.$$

Zkouška při tomto postupu není nutná.

Správné řešení zaslali *Jozef Mészáros* z Jelky a *Martin Raszyk* z G v Karviné. Neúplné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Anton Hnáth* z Moravan.

Úloha 192

Najděte všechny dvojice obdélníků s celočíselnými délkami stran v mm takových, že jeden má délku o 4 mm větší než šířku, druhý má délku o 32 mm větší než šířku a přitom mají stejné obsahy.

Jaroslav Zhouf

Řešení. Označme a, b celočíselné délky kratších stran obou obdélníků v mm. Z rovnosti obsahů obou obdélníků plyne

$$a(a + 4) = b(b + 32).$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$(-a + b + 14)(a + b + 18) = 252 (= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7).$$

Druhý činitel na levé straně této rovnice je přirozené číslo. První činitel proto musí být celé nezáporné číslo, které je současně menší než druhý činitel. Dále snadno zjistíme, že oba činitelé na levé straně rovnice mají stejnou paritu. Těmto podmínkám vyhovují pouze rozklady čísla 252 na součin činitelů, které jsou uvedeny v následující tabulce:

$-a + b + 14$	2	6	14
$a + b + 18$	126	42	18
$2a + 4$	124	36	4
a	60	16	0
b	48	8	0

Čísla a, b jsou obě přirozená pouze v prvních dvou případech. Existují tedy dvě dvojice obdélníků vyhovující podmínkám úlohy. První dvojici tvoří obdélníky 60 mm \times 64 mm a 48 mm \times 80 mm, druhou dvojici obdélníky 16 mm \times 20 mm a 8 mm \times 40 mm.

Správné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Vladimír Pavel* z Blovic a *Martin Raszyk* z G v Karviné. Neúplné řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy.

Fyzikální experimenty se zvukovou kartou PC

ČENĚK KODEJŠKA – ANEŽKA RAICHOVÁ – JIŘÍ BERNÝ – LUKÁŠ KOZÁK

Gymnázium, Nový Bydžov

V rámci zatraktivnější výuky fyziky jsme se zabývali využitím zvukové karty počítače a několika dalších jednoduchých pomůcek (fotodiody, laserové ukazovátko, papírový hřeben, kyvadlo) k provedení fyzikálních experimentů, které by mohly být alternativou profesionálních školních měřicích systémů typu ISES, Vernier nebo Coach.

Všechny experimenty využívají jednoduchou optickou bránu, která je sestavena z laserového ukazovátko a fotodiody, ze které je signál přiveden na mikrofonní vstup zvukové karty. Princip optické brány je pak zřejmý: přerušením laserového paprsku dojde ke změně napětí na fotodiodě a na výstupu je pulz, jehož průběh odpovídá průběhu přechodného děje.

Tímto způsobem můžeme tedy měřit jak dlouhé, tak i velmi krátké časové úseky řádově 10^{-4} s. Toho lze využít např. při měření doby volného pádu, zrychlení tělesa, pohybu kyvadla nebo i rychlosti zvuku při použití mikrofonu místo fotodiody.

V experimentech jsme průběžně použili následující pomůcky: notebook nebo PC, fotodiodu 1 PP 75 (součást starších fyzikálních školních souprav) nebo nový typ BPW 34, laserové ukazovátko (červené nebo zelené), kyvadlo a papírový hřeben se stejně širokými zuby vystřížený z kartonu. Fotodiody musí mít přijímací frekvenci ve viditelné oblasti.

K záznamu a vyhodnocení signálu jsme použili freewareový program pro úpravu zvuku *Free Audio Editor*. Jeho výhodou je přehledná a snadná obsluha. Tento program dokáže zaznamenaný signál dále upravovat, můžeme

tedy např. provést výběr části signálu a program vyhodnotí jeho délku (okénko nazvané Length) nebo lze slabý signál zvětšit. Před vlastním měřením stačí nastavit pouze typ vstupu (mono nebo stereo), u vstupního zařízení (Input Device) zvolit mikrofon, úroveň signálu (Input Level) nastavit tak, aby při přerušení laserového paprsku signál z fotodiody nepřesáhl 100 %, a pak již spustit vlastní měření (záznam zvuku) tlačítkem Record. Po proběhnutí experimentu (zpravidla stačí 10 s až 15 s) ukončíme měření tlačítkem Keep. Zobrazí se nám zaznamenaný signál, se kterým pak dále pracujeme pomocí myši. Záznam lze samozřejmě i uložit ve formátu WAV zvukového souboru, takže si můžeme data experimentu kdykoliv znovu vyhodnotit.

Závěrem připomeňme důležitý fakt, že pomocí zvukové karty lze měřit pouze střídavé napětí do cca 1,5 V (výstup z fotodiody je řádově 100 mV, takže nemusíme mít obavu ze zničení zvukové karty při přímém zapojení výstupu diody do mikrofonního vstupu pomocí 3,5 mm jack konektoru). Stejnsměrné napětí kvůli oddělovacímu kondenzátoru za vstupem zvukové karty nelze zaznamenat. Výhodou použití zvukové karty oproti jiným systémům je vysoká vzorkovací frekvence (standardně 44,1 kHz, ale v dnešní době lze jít až k hodnotám řádově MHz).

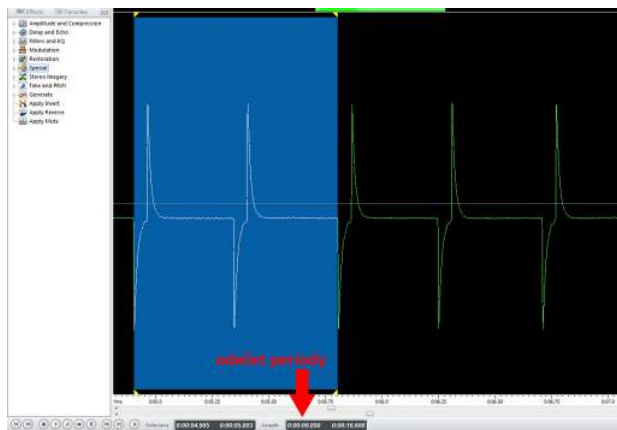
V další části příspěvku popíšeme stručně pět experimentů z oblasti mechaniky a teorie kmitů.

1 Měření tíhového zrychlení z periody kmitů kyvadla



Obr. 1

Při určení hodnoty tíhové zrychlení z periody kmitů kyvadla vycházíme ze známého vztahu pro periodu kmitů matematického kyvadla. Vlastní kyvadlo sestavíme např. z válečku zavěšeného na niti nebo provázku a laserový paprsek zaměříme na střed válečku, který pro účely našeho měření ztotožníme s jeho těžištěm. Provedení experimentu vidíme na obr. 1 a zaznamenaný signál na obr. 2. Při tomto i dalších experimentech využíváme optickou bránu sestavenou z laserového ukazovátka a fotodiody, jejíž výstup je připojen na vstup zvukové karty. Jednoduchá optická brána má oproti klasickému měření (prováděnému např. pomocí stopek) několik výhod: odpadá systematická chyba měření způsobená reakcí žáka při mačkání stopek, periodu jsme schopni odečíst s přesností 10^{-4} s. Lepších výsledků dosáhneme s větší délkou kyvadla a maximální výchylkou kyvadla do 10° . Free Audio Editor využijeme k záznamu signálu a přímému odečtu hodnoty periody v okénku Length.



Obr. 2

Měření lze provést pro různé hodnoty délky závěsu kyvadla a na konci experimentu porovnat, pro jakou délku závěsu vychází přesnější hodnoty ve srovnání s hodnotou $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Při našem měření byla zjištěna průměrná hodnota periody kyvadla $T = 1,583 \text{ s}$. Vzhledem k tomu, že délka kyvadla byla určena s odchylkou 1 mm, je vypočtená hodnota tíhového zrychlení $g = 9,77 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, tzn. odchylka tíhového zrychlení od standardní hodnoty je 0,4 %.

2 Měření tuhosti pružiny dynamickou metodou

Experiment sestavíme obdobným způsobem. Místo kyvadla použijeme pro přerušení paprsku špejli, kterou přichytíme pomocí izolepy k závaží zavěšenému na pružině. Ze vztahu pro periodu kmitů pružinového oscilátoru vyjádříme tuhost a dosadíme experimentálně zjištěné hodnoty periody T , které určíme pomocí Free Audio Editoru. Uspořádání je na obr. 3.

Měření bylo provedeno pro dvě závaží o hmotnostech $m_1 = 0,44$ kg a $m_2 = 0,72$ kg. Měření byly zjištěny průměrné periody kmitů $T_1 = 0,81$ s a $T_2 = 1,01$ s a výpočtem byly zjištěny průměrné hodnoty tuhosti pružiny $k_1 = 26$ N · m⁻¹ a $k_2 = 28$ N · m⁻¹.



Obr. 3

3 Ověření vztahu pro periodu matematického kyvadla v závislosti na velikosti maximální výchylky

Experiment uspořádáme stejným způsobem jako experiment 1 s tím rozdílem, že nyní měříme pomocí optické závory periodu kyvadla pro stejnou délku kyvadla při různém úhlu maximální počáteční výchylky. Naměřené hodnoty pak porovnáme s teoretickou hodnotou pro periodu kyvadla nezávislejší na výchylce a s teoretickou hodnotou závislejší na výchylce α_{\max} podle vztahu

$$T = 2\pi^2 \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_{\max}}{2} + \dots \right). \quad (1)$$

Pro účely běžného měření postačí vzít v úvahu první člen rozvoje, další členy již výsledek zásadním způsobem neovlivní. Uspořádání experimentu je na obr. 4 a hodnoty pro tři různé úhly jsou v tabulce 1. T_0 je hodnota periody vypočtená bez závislosti na výchylce, T je perioda určená ze vztahu (1) a průměrné hodnoty experimentálně změřené periody jsou ve sloupci $\overline{T}_{\text{exp.}}$.

Tabulka 1 Závislost periody na maximální výchylce kyvadla

α_{max} (°)	T_0 (s)	T (s)	$\overline{T}_{\text{exp.}}$ (s)
30	1,316	1,337	1,333
45	1,316	1,364	1,348
60	1,316	1,398	1,380



Obr. 4

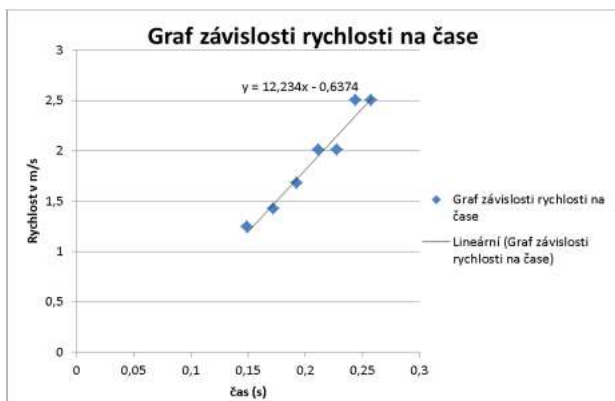


Obr. 5

4 Ověření vztahu pro rychlost volného pádu jako rovnoměrně zrychleného pohybu

V tomto experimentu si kromě obvyklých pomůcek musíme nachystat i papírový hřeben, který vystříháme z tvrdého kartonového papíru. Hřeben by měl mít všechny zuby stejně široké, my jsme zvolili šířku zubu

$d = 1$ cm a celkovou délkou hřebene cca 25 cm. Hřeben necháme padat volným pádem ze stále stejné výšky mezi laserovým ukazovátkem a fotodiodou a zaznamenáme přerušování paprsku laseru jednotlivými zuby. Protože známe šířku i -tého zubu, můžeme ve Free Audio Editoru určit celkový čas průchodu i -tého zubu paprskem a ze vztahu $v_i = d/t_i$ vypočítat přibližnou hodnotu okamžité rychlosti i -tého zubu. Protože se jedná o pohyb zrychlený, má první zub nejmenší rychlost a i -tý zub největší rychlost. Grafická závislost rychlosti na čase je pak lineární funkce, kde konstantou úměrnosti je hodnota tíhového zrychlení ($v = gt$). Uspořádání experimentu vidíme na obr. 5. V tabulce 2 jsou naměřené hodnoty a na obr. 6 je odpovídající graf vytvořený programem MS Excel (Δt je doba průchodu i -tého zubu optickou závorou, v je okamžitá rychlost daného zubu a t je celkový čas od puštění hřebene).



Obr. 6

Tabulka 2 Volný pád hřebene

Číslo zubu	Δt (s)	v (m/s)	t (s)
1	0,012	0,83	1,764
2	0,010	1,00	1,785
3	0,008	1,25	1,803
4	0,007	1,43	1,820
5	0,006	1,67	1,836
6	0,005	2,00	1,851
7	0,004	2,50	1,863

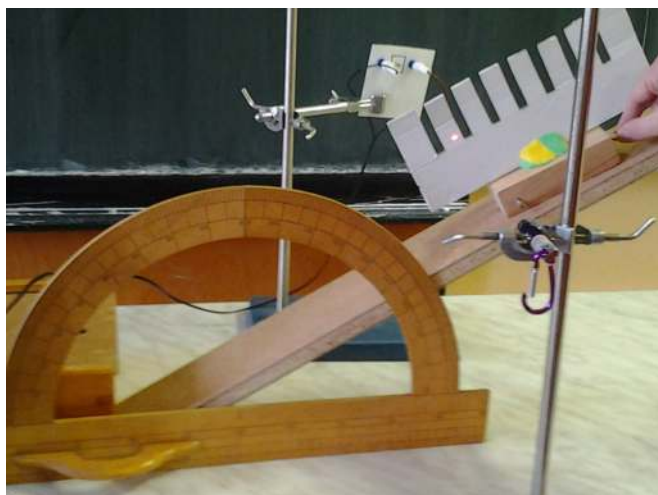
5 Určení součinitele smykového tření ze zrychlení tělesa na nakloněné rovině

Uspořádání experimentu je patrné z obr. 7. Dřevěný kvádr necháme klouzat po nakloněné rovině pod určitým úhlem. Na kvádr jsme pomocí modelíny připevnili papírový hřeben se zuby z minulé úlohy. Při zrychleném pohybu kvádrů s hřebenem po nakloněné rovině zuby hřebene protínají laserový paprsek optické závory. Můžeme tedy ze záznamu signálu určit čas průchodu prvního zubu, čas průchodu posledního (v našem případě sedmého) zubu a z rozdílu rychlostí a rozdílu času vypočítat zrychlení soustavy. Ze vztahu pro zrychlení tělesa na nakloněné rovině

$$a = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

vyjádříme součinitel smykového tření f a do vztahu dosadíme hodnoty úhlu a zrychlení změřené při experimentu:

$$f = \operatorname{tg} \alpha - \frac{a}{g \sin \alpha}$$



Obr. 7

Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 3. Časy t_1 a t_2 jsou doby průchodu prvního a sedmého zubu optickou závorou, rychlosti v_1 a v_2 jsou

přibližné okamžité rychlosti zubů (šířka zubu je vždy 1 cm), $\Delta v = v_7 - v_1$, Δt je celkový čas mezi průchodem prvního a sedmého zubu laserovým paprskem, a je zrychlení při pohybu na nakloněné rovině vypočítané ze vztahu $a = \Delta v / \Delta t$ a f je vypočtený součinitel smykového tření.

Tabulka 3 Určení součinitele smykového tření (dřevo – dřevo)

t_1 (s)	t_7 (s)	v_1 ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	v_7 ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	Δv ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	Δt (s)	a ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)	f
0,020	0,012	0,50	0,83	0,33	0,24	1,40	0,29
0,023	0,014	0,44	0,71	0,28	0,23	1,22	0,33
0,022	0,013	0,46	0,77	0,31	0,22	1,43	0,28
0,021	0,014	0,47	0,71	0,24	0,21	1,14	0,34
0,021	0,014	0,47	0,71	0,24	0,20	1,17	0,34

Průměrná hodnota součinitele smykového tření je $\bar{f} = 0,32$, tabulková pro povrch dřevo – dřevo $f = 0,3$.

Závěr

Při našich experimentech se zvukovou kartou jsme ověřili na několika experimentech z oblasti mechaniky i teorie kmitů, že optická brána sestavená z laserového ukazovátka a fotodiody umožňuje provádět měření srovnatelná s experimenty uskutečněnými s využitím profesionálních souprav typu ISES, Vernier nebo Coach. Předností je možnost realizovat experimenty nejen jako demonstrace, ale zejména jako laboratorní cvičení žáků. Výhodou je také cenová dostupnost použitých pomůcek, která může pro řadu základních i středních škol představovat zajímavou alternativu k velmi drahým profesionálním soupravám.

Experimenty se zvukovou kartou lze rozšířit i o další oblasti fyziky: pokusy se zvukem (rychlost, frekvence), demonstrace rázů, zákon zachování mechanické energie, vrhy, měření tepové frekvence, elektrická měření se střídavým proudem (RLC), modul pružnosti určený z torzních kmitů, měření teploty a mnohé další.

Termodielektrický jev a možnosti jeho měření

MARTIN TOMÁŠ – PAVEL NOVOTNÝ

Nové technologie – výzkumné centrum, Západočeská univerzita, Plzeň

Úvod

Fyzika pevných látek nás neustále přesvědčuje, jak pozoruhodné mohou být vlastnosti materiálů v našem bezprostředním okolí. Rychlý rozvoj tohoto odvětví fyziky je doprovázen objevy často nečekaných zákonitostí. Některé tyto objevy se téměř okamžitě uplatňují v průmyslové výrobě, jiné se dočkají své aplikace až po mnoha letech. Jedním z téměř zapomenutých jevů je jev termodielektrický. Cílem tohoto článku je popis termodielektrického jevu, popis možností měření tohoto jevu a možnost využití tohoto jevu ve výuce.

Současné poznatky o termodielektrickém jevu

Termodielektrický jev souvisí s chováním dielektrik během fázového přechodu. Výzkum těchto vlastností můžeme sledovat až do druhé poloviny 19. století, kdy *Heaviside* publikoval práci o teoretické existenci permanentně polarizovaných dielektrik [1]. Protože se jedná o elektrostatickou analogii permanentních magnetů, jsou tato dielektrika nazvána *elektrety*. Experimentální důkaz existence těchto materiálů přináší až výzkumy *Eguchiho*, který vytvořil první elektret ze směsi běžně dostupných vosků [2]. Nejstarší způsob přípravy elektretů spočívá v tuhnutí kapalného vosku v silném elektrickém poli. Roztavený vosk je vložen mezi dvě elektrody, na které je přivedeno vysoké napětí. Po ztuhnutí vosku můžeme po dlouhou dobu pozorovat vázaný elektrický náboj na povrchu materiálu. Takto polarizované dielektrikum (*termoelektret*) pochopitelně interaguje s ionty v okolním vzduchu, a proto se postupně materiál depolarizuje. Tento proces je však možné částečně eliminovat například uložením elektretu do hliníkové fólie.

Existují i další možné způsoby přípravy elektretů. Některé souvisejí s pouhým vložením dielektrika do silného elektrického pole, jiné zvyšují

koncentraci volných nosičů elektrického náboje uvnitř dielektrika působením ionizujícího záření. Elektrety našly své uplatnění v mikrofonech a dalších elektrotechnických zařízeních. Jejich výzkumu se dále věnovali badatelé po celém světě a jedním z nich byl *Costa Ribeiro*, který působil ve 40. letech v Brazílii.

Costa Ribeiro se snažil připravovat termoelektrety z některých druhů vosků a během tohoto výzkumu si povšimnul, že v dielektriku, které právě prodělává fázový přechod, dochází k zvláštní separaci elektrického náboje [3]. Pokud byly elektrody zcela vyplněny dielektrikem a toto dielektrikum tálo či tuhlo, bylo možné měřit elektrické napětí vznikající jako důsledek fázového přechodu. Costa Ribeiro dále měřil tento jev u materiálů, jako je parafín, naftalen či karnaubská pryskyřice. Společně se svými spolupracovníky se pokusil o teoretické vysvětlení termodielektrického jevu [4]. Nezávisle na Costa Ribeirovi tentýž jev objevili i *Workman* a *Reynolds* během fázového přechodu vody [5]. Protože byl termodielektrický jev pozorován u tuhnutí vody, bývá někdy vznikající elektrické napětí označováno jako *zamrzlý potenciál* (freezing potential) [6].

Termodielektrický jev probíhající ve vodě během fázového přechodu může úzce souviset se vznikem různých elektrických jevů v atmosféře. Je se tedy dostal do popředí zájmu mnoha badatelů [7]. Teoretický popis termodielektrického jevu však dodnes zůstává pouze částečným. Teoretický koncept, který publikoval Gross, je vhodný pouze pro určité materiály [4]. Termodielektrický jev tak není dodnes zcela vysvětlen. Grossova teorie je založena na ztotožnění fázového rozhraní mezi kapalnou a pevnou fází dielektrika s dvojitou potenciálovou bariérou. Přes tuto bariéru prostupují jednotlivé druhy nosičů elektrického náboje v rozdílném množství. Výška bariéry je pro různé nosiče elektrického náboje odlišná. Fázové rozhraní putující materiálem separuje nosiče elektrického náboje do rozdílných oblastí a mezi těmito oblastmi vzniká elektrické napětí.

Dlouhou dobu se diskutovalo o povaze nosičů elektrického náboje [8]. Předpokládá se, že dielektrikum obsahuje pouze velice malé množství volných nábojů. Je tedy možné, že ionty a další typy nosičů vznikají až během fázového přechodu. Tuto myšlenku podpořil svým experimentem *Dias Tavares*, který sledoval desublimaci naftalenu. Dias Tavares měřil průběh termodielektrického jevu u zrna naftalenu, na které dosedají naftalenové páry. Aparaturu rozšířil o další dvě elektrody, na které bylo přivedeno vysoké elektrické napětí. Naftalenové páry tak k zrnu dospěly až po průchodu mezi těmito elektrodami. Účinnost této modifikace vyzkoušel při sledování

ionizace vzduchu působením ionizujícího záření z tablety oxidu uranu. Namísto naftalenového zrna použil nabitě těleso a elektrometrem zjišťoval postupné vybíjení tělesa působením vzdušných iontů. Zjistil, že při přivedení napětí na elektrody jsou působením elektrického pole ze vzduchu odstraněny prakticky všechny ionty a vybíjení tělesa ustává. Poté měřil termodielektrický jev a sledoval vliv přivedeného elektrického napětí na průběh tohoto jevu. Stejný průběh termodielektrického jevu bylo možné naměřit i v případě, že na elektrody bylo přivedeno elektrické napětí. Nosiče náboje je tedy nutné hledat až v místě fázového přechodu.

Costa Ribeiro během svého studia termodielektrického jevu určil dva základní zákony, kterými je termodielektrický jev popsán [3]. První z nich zní, že elektrický proud vznikající mezi oběma fázemi dielektrika je přímo úměrný rychlosti, s jakou se pohybuje fázové rozhraní mezi těmito dvěma fázemi. Druhý zákon říká, že velikost elektrického proudu je přímo úměrná množství materiálu, který prodělává fázový přechod. Z prvního zákona je zřejmé, že jev nenastává u rovnovážných situací. Pro průběh termodielektrického jevu je zásadní pohyb fázového rozhraní. Druhý zákon vyjadřuje skutečnost, že v případě fázového přechodu dielektrika musíme brát v úvahu i množství dielektrika, které se děje účastní.

V současnosti je termodielektrický jev využíván i v technické praxi [8]. Při výrobě plastů se využívá procesů polymerace a polyadice. Tyto procesy jsou doprovázeny vznikem termodielektrického napětí, které může podat důležité informace. Maximální naměřené elektrické napětí během termodielektrického jevu totiž odpovídá konci procesu polymerace či polyadice. Díky tomuto měření je možné zlepšit efektivitu výrobního procesu. Dalším využitím termodielektrického jevu je možnost určení čistoty některých látek. Průběh termodielektrického jevu je silně závislý na množství nečistot v daném dielektriku. V případě naftalenu je možné pomocí termodielektrického jevu určit čistotu látky s lepší rozlišovací schopností, než je tomu u standardních metod (měření elektrické vodivosti).

Teoretický popis termodielektrického jevu

Pro popis termodielektrického jevu Gross ztotožnil fázové rozhraní s dvojitou potenciálovou bariérou (viz [3]). Další možností je popis termodielektrického jevu pomocí distribučních koeficientů a difúzních konstant iontů v blízkosti fázového rozhraní. Tento způsob naznačil ve své práci *LeFebvre* [9]. Podobný přístup pak zvolili i *Bronshiteyn* a *Chernov* [10]. Jedním z cílů tohoto článku je ukázat využití termodynamiky k vyšetření termodielektrického jevu.

Při popisu termodielektrického jevu se soustředíme na situaci při tuhnutí dielektrika. Během fázového přechodu můžeme uvažovat rovnost elektrochemických potenciálů jednotlivých fází (kapalná fáze l a pevná fáze s)

$$\mu_l \rightleftharpoons \mu_s. \quad (1)$$

Rozdíl elektrochemických potenciálů udává chemickou afinitu

$$A = \mu_l - \mu_s, \quad (2)$$

která je hnací silou fázového přechodu. Pro komponentu α lze specifický elektrochemický potenciál obecně zapsat ve tvaru

$$\mu_\alpha = u_\alpha + pv_\alpha - Ts_\alpha + \varphi_\alpha, \quad (3)$$

přičemž uvažujeme komponentu α v pevné a kapalná fázi [11]. Ve vztahu (3) symbol u_α značí specifickou vnitřní energii komponenty α , p je tlak, v_α je specifický objem komponenty α , T je termodynamická teplota, s_α je specifická entropie a φ_α je elektrický potenciál komponenty α . Pro φ_α rovněž platí

$$\varphi_\alpha = \frac{z_\alpha F}{M_\alpha} \Phi, \quad (4)$$

kde z_α je počet elementárních nábojů v komponentě α , F je Faradayova konstanta ($F = 96\,485 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$), M_α je molární hmotnost a Φ je celkový měřený elektrický potenciál na fázovém rozhraní.

Vyšetříme nyní situaci, kdy se látka nachází současně v pevné i kapalná fázi [11]. Podle (3) pak platí

$$\mu_l - \mu_s = u_l - u_s + p(v_l + v_s) - T(s_l - s_s) + (\varphi_l - \varphi_s). \quad (5)$$

Změna velikosti elektrochemických potenciálů je příčinou elektrického toku. Můžeme tedy zapsat

$$j_{e\alpha} \sim \frac{z_\alpha F}{M_\alpha T} \nabla \Phi. \quad (6)$$

U fázového přechodu jsou teplota a tlak v obou fázích stejné a platí vztah

$$A = 0 = \mu_l - \mu_s \quad (7)$$

Rovnost elektrochemických potenciálů obou fází

$$\mu_l = \mu_s. \quad (8)$$

vede s využitím rovnice (5) ke vztahu pro velikost indukovaného elektrického potenciálu

$$\Delta\Phi = -\frac{M}{zF}[u_1 - u_s + p(v_1 - v_s) - T(s_1 - s_s)]. \quad (9)$$

Pro zjednodušení můžeme předpokládat, že specifická vnitřní energie kapaliny a pevné látky je téměř shodná. Totéž budeme předpokládat i pro specifický objem kapaliny a pevné látky. Elektrický potenciál tak vyjádříme pomocí tepla tuhnutí

$$h_{1s} = -T(s_1 - s_s) \quad (10)$$

a zapíšeme ve tvaru

$$\Delta\Phi = \frac{MT(s_1 - s_s)}{zF} = \frac{Mh_{1s}}{zF}. \quad (11)$$

Z rovnice (11) plyne pro teplo fázového přechodu

$$h_{1s} = \frac{zF\Delta\Phi}{M}. \quad (12)$$

Dále můžeme rozepsat

$$\Delta\Phi = \int_0^{t_{\text{eq}}} \frac{i}{C} dt, \quad h_{1s} = \int_0^{t_{\text{eq}}} W dt = \frac{zF\Delta\Phi}{M}, \quad (13)$$

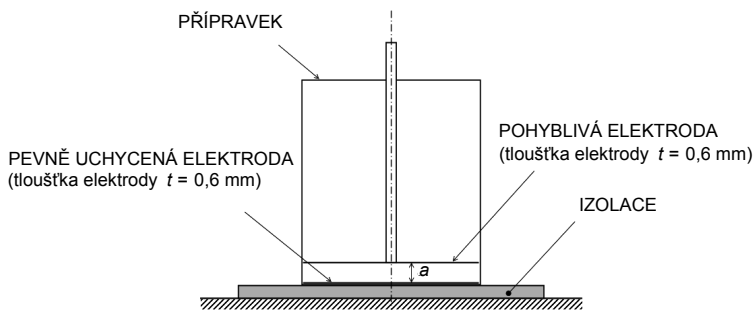
kde C označuje elektrickou kapacitu, W je tepelný výkon uvolněný během termodielektrického jevu a t_{eq} je doba trvání termodielektrického jevu. Rozdíl potenciálů a teplo fázového přechodu lze porovnat, protože můžeme zapsat $1 \text{ V} = \text{J} \cdot \text{C}^{-1} \wedge 1 \text{ eV} = 96\,485 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$. Pro elementární náboj platí totiž vztah ve tvaru $eN_A = F$, což představuje náboj jednoho molu elektronů. Pokud tuto známou relaci vynásobíme rozdílem potenciálů 1 V , získáme výše uvedenou hodnotu energie platnou pro 1 eV . Je tedy zřejmý vztah mezi veličinami elektrické napětí a energie.

Vztah (12) lze potvrdit měřením rozdílu elektrických potenciálů $\Delta\Phi$ voltmetrem a tepla fázového přechodu h_{1s} kalorimetrem.

Měření termodielektrického jevu

Pro vlastní měření termodielektrického jevu je nutné zhotovit vhodný přípravek, ve kterém bude jev probíhat. Do přípravku je potřeba umístit

kovové elektrody, mezi kterými bude měřený materiál měnit své skupenství (obr. 1). Jako měřený materiál je možné použít například karnaubskou pryskyřici, včelí vosk či parafín. Námi prezentované výsledky byly získány sledováním tuhnoucího parafínu.

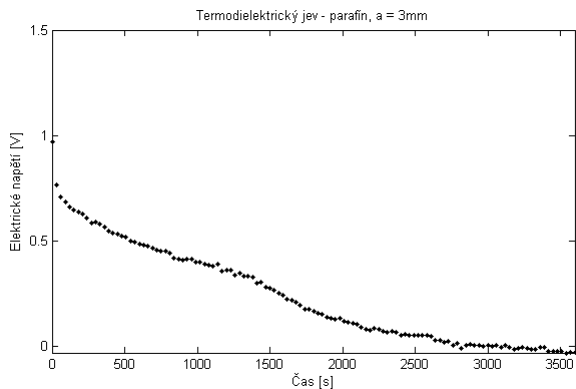


Obr. 1 Schéma přípravku pro měření termodielektrického jevu

V případě naší měřicí aparatury byly vývody od kruhových měděných elektrod připojeny k citlivému voltmetru Solartron 1287A Potentiostat/Galvanostat. K měření je ale možno využít jakýkoliv voltmetr s dostatečně vysokým vstupním odporem (od $R_i = 10^{14} \Omega$). Před měřením byl přípravek s parafínem ponořen do vodní lázně a zahříván. Teplota tání parafínu je nižší, než je teplota varu vody. Během zahřívání tak došlo ke zkapalnění parafínu. Přípravek samotný dosahoval podobné teploty jako kapalný parafín. Po vyjmutí přípravku z vodní lázně byly vývody elektrod připojeny k voltmetru. Přípravek byl následně tepelně izolován od okolí, pouze vrchní část přípravku byla ve volném styku s okolním vzduchem. Fázové rozhraní tak vznikalo u hladiny kapalného parafínu a postupně se šířilo směrem ke spodní elektrodě. Pomocí tepelné izolace byl tedy určen směr pohybu fázového rozhraní. Vzdálenost kruhových elektrod a byla nastavena na $a = 3 \text{ mm}$ a množství parafínu mezi elektrodami bylo vypočteno ze známých rozměrů elektrod, které byly vyrobeny z mědi o tloušťce $t = 0,6 \text{ mm}$ a průměru $d = 100 \text{ mm}$. Hmotnost parafínu tedy byla určena jako $m = 18,31 \text{ g}$ při hustotě $\rho = 0,777 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ [12].

Měření termodielektrického jevu probíhalo po dobu jedné hodiny. Interval odečtu hodnoty elektrického napětí byl stanoven na jednu sekundu.

Získaná závislost tak tvořila rozsáhlý soubor dat, který bylo nutné zanalyzovat. Vlastní analýza získaných dat sestávala z výpočtu střední hodnoty ze tří provedených měření. Takto získaný průběh střední hodnoty byl stále velmi jemný, a proto byl proveden výpočet střední hodnoty v definovaném intervalu dat. Vždy ze třiceti naměřených hodnot byla určena střední hodnota. Soubor dat se tak zredukoval na 120 hodnot. Výsledky měření jsou znázorněny na obr. 2.



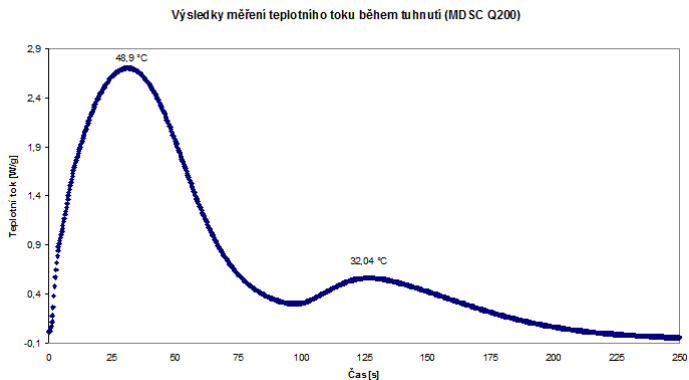
Obr. 2 Elektrické napětí během termodielektrického jevu (parafín, $a = 3$ mm)

Parafín byl následně analyzován kalorimetrem (MDSC Q200, TA Instruments). Výsledkem tohoto měření byla hodnota skupenského tepla tuhnutí. V případě námi měřeného parafínu dosahovala hodnota tepla tuhnutí $h_{1s} = 192,7 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1}$, což je ve shodě s publikovanými hodnotami [12].

Rychlost tuhnutí parafínu byla v případě našeho měření nastavena na hodnotu $\Delta t = 10^\circ \text{ C} \cdot \text{min}^{-1}$. Z výsledků měření (obr. 3) je zřejmé, že parafín je složen z několika komponent. Z hodnoty uvolněného skupenského tepla a teploty, kdy k uvolnění došlo, lze určit, jaké komponenty jsou v daném vzorku dominantně zastoupeny. Obecně platí, že parafín je směsí alkanů s počty uhlíků 20 až 40. Podle způsobu výroby se mohou jednotlivé směsi významně lišit. Podle teploty tuhnutí jednotlivých komponent (obr. 3) můžeme ve vzorku uvažovat přítomnost eikosanu a hexakosanu, jejichž teploty tuhnutí se pohybují v blízkosti naměřených hodnot [12]. Pokud vztah (12) vyjádříme ve tvaru

$$M = \frac{zF\Delta\Phi}{h_{1s}}, \quad (14)$$

můžeme ze znalosti tepla tuhnutí a rozdílu potenciálu mezi elektrodami určit molární hmotnost měřeného parafínu. Z obr. 2 předpokládáme rozdíl potenciálů na počátku termodielektrického jevu $\Delta\Phi = 0,7$ V. Pokud ve výpočtu předpokládáme pouze 1 uvolněný elektron na molekulu účastníci se fázového přechodu, dosahuje molární hmotnost hodnoty $M = 350,49$ g·mol⁻¹, což je v souladu s publikovanými hodnotami [12].



Obr. 3 Časová závislost teplotního toku (parafín)

Ze znalosti molární hmotnosti eikosanu $M_E = 282,5475$ g·mol⁻¹ a hexakosanu $M_H = 366,707$ g·mol⁻¹ lze dále předpokládat i hmotnostní poměr zastoupení jednotlivých komponent. V případě námi měřeného parafínu odpovídá tento hmotnostní poměr hodnotě 1 : 5, přičemž významněji zastoupenou komponentou je hexakosan.

Závěr

Termodielektrický jev je možné využít k velmi zajímavému demonstračnímu experimentu, který rozšíří možnosti výuky. Přestože je nauka o dielektrikách podpořena skutečně výborným teoretickým základem, ve školní výuce je toto téma mírně přehlíženo. Experimenty s dielektriky netvoří velkou skupinu demonstračních experimentů. Tyto experimenty jsou spíše okrajovou oblastí výuky a to na základních i středních školách.

Ve spojení s kalorimetrickým měřením lze využít termodielektrický jev k realizaci laboratorní úlohy, která umožní sledovat složení tak složitých

látek, jako je parafín. Dalším rozšířením teorie termodielektrického jevu pak může být popis z hlediska nerovnovážné termodynamiky.

Poděkování

Tento výsledek vznikl v rámci projektu CENTEM, reg. č. CZ.1.05/2.1.00/03.0088, který je spolufinancován z ERDF v rámci programu MŠMT OP VaVpI.

Literatura

- [1] *Heaviside, O.*: Electrical papers. 2. vyd. American Mathematical Society (United States), 2003, 587 s.
- [2] *Eguchi, M.*: Further Research on Permanently Polarized Dielectric. Proceedings of Phys.-Math. Society of Japan, 1920, roč. 2, č. 7, s. 169-176.
- [3] *Ribeiro, C. J.*: On the thermodielectric effect. Anais da Academia Brasileira de Ciencias. 1950, roč. 3.
- [4] *Gross, B.*: Theory of Thermodielectric effect. Physical Review, 1954, vyd. 94, č. 6, s. 1545-1551.
- [5] *Workman, E.J. – Reynolds, S.E.*: Electrical phenomena occurring during the freezing of dilute aqueous solutions and their possible relationship to thunderstorm electricity. Physical Review, 1950, vyd. 78, s. 254-259.
- [6] *Gross, G.W.*: Freezing Potentials in the System $H_2O-NH_3-CO_2$ at Controlled Concentrations, Journal of the Atmospheric Sciences 1971, vyd. 28, č. 6, s. 1005-1014.
- [7] *Onsager, L.*: The Collected Works of Lars Onsager (with Commentary). Singapore: World Scientific Publishing, 1996, 1075 s. ISBN 978-981-02-2563-6
- [8] *Eyerer, P.*: Electric charge separation and charge storage during phase changes in the absence of external electric fields: thermodielectric effect (Costa Ribeiro effect) and Workman - Reynolds effect. Advances in Colloid and Interface Science, 1972, roč. 3, č. 3, s. 223-273.
- [9] *Lefebre, V.*: The Freezing Potential Effect, Journal of Colloid and Interface Science, 1967, vyd. 25, s. 263-269.
- [10] *Bronshsteyn, V.L. – Chernov, A. A.*: Freezing potentials arising on solidification of dilute aqueous solutions of electrolytes, Journal of Crystal Growth, 1991, vyd. 112, s. 129-145.
- [11] *Maršík, F. Dvořák, I.*: Biotermodynamika. Praha: Academia, 1998, 270 s. ISBN 80-200-0664-8
- [12] *Freund, M. – Csikos, R. – Keszthelyi, S. – Mozes, Gy.*: Paraffin products: properties, technologies, applications. Budapešť: Elsevier, 1982, 335 s. ISBN 0-444-99712-1

Demonstrujeme teplotní vodivost

JIŘÍ ERHART – PETR DESEŇSKÝ

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická TU, Liberec

Úvod

Mezi dvěma místy s rozdílnou teplotou dochází k předávání tepla. Omezíme-li se pouze na nejjednodušší mechanismus přenosu tepla tepelnou výměnou, lze přenesené teplo charakterizovat pomocí veličiny zvané tepelný tok

$$J_Q = \frac{\partial Q}{\partial t} \approx \frac{\Delta Q}{\Delta t}, \quad [\text{W}]. \quad (1)$$

Veličina udává teplo přenesené za jednotku času. To je pochopitelně veličina závislá na geometrii přenosu a vlastnostech materiálu. Tepelný tok lze vyjádřit pomocí těchto vlastností jako

$$J_Q = \lambda S \frac{T_2 - T_1}{d}, \quad (2)$$

kde λ [$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$] je součinitel tepelné vodivosti, S je plocha, kterou se teplo kolmo přenáší na vzdálenost d s teplotním rozdílem $T_2 - T_1$. Součinitel tepelné vodivosti λ charakterizuje přenášené teplo, nikoliv však rozložení teploty v prostoru. Rovnice vedení tepla je však již celkem složitou parciální diferenciální rovnicí pro teplotu $T(x, t)$ jako funkci času t a polohy x

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\lambda}{\rho c} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

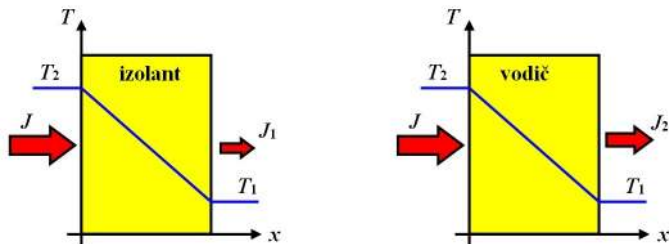
jdoucí již nad rámec středoškolské fyziky. Obsahuje jen jediný materiálový koeficient – součinitel vedení teploty

$$\chi = \frac{\lambda}{\rho c}, \quad [\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}], \quad (4)$$

kde ρ je hustota prostředí a c je jeho měrná tepelná kapacita. Tento koeficient potom charakterizuje časovou a prostorovou závislost rozložení

teploty. Rovnici vedení tepla nelze obecně řešit pro libovolné zadání okrajových a počátečních podmínek. Lze však alespoň jednoduše najít ustálené rozdělení teploty v prostoru.

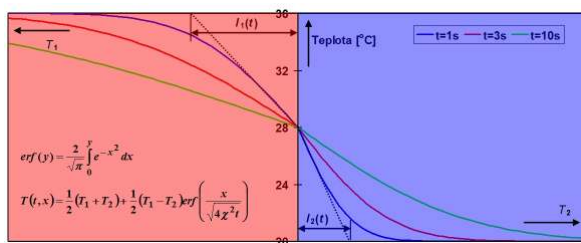
To je charakterizováno ustáleným spádem teploty, který není závislý na materiálových vlastnostech prostředí. Při stejném ustáleném profilu teploty se však liší tepelný tok materiálem. V tepelně dobře izolujících materiálech je tok menší, v tepelně dobře vodivých materiálech pak velký (obr. 1).



Obr. 1 Profil teploty a tepelný tok v tepelně izolačním a tepelně vodivém materiálu. Při stejném ustáleném rozdělení teploty je tepelný tok J_2 přenesený tepelně vodivým materiálem větší než tok J_1 tepelně izolujícím prostředím.

Parabolický zákon šíření teplotní změny v prostoru

Předpokládejme nyní pro jednoduchost dvě materiálová prostředí vyplňující sousedící poloprostory s různými vlastnostmi a s rovinným rozhraním podle obr. 2. Pro odvození šíření tepla na rozhraní dvou těles použijme postup podle [1].



Obr. 2 Prostorový průběh teploty v závislosti na čase na rozhraní dvou prostředí. Vlevo je teplejší ($T_1 = 36 \text{ }^\circ\text{C}$, $\chi = 0,2 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) a vpravo chladnější těleso ($T_2 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, $\chi = 0,1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$). Teplota na rozhraní je na čase nezávislá a rovna $T_0 = 28 \text{ }^\circ\text{C}$, vyznačeny jsou také rozdílné hloubky průniku teplotní změny v jednotlivých tělesech l_1 a l_2 .

Ve velké vzdálenosti od rozhraní nechť mají prostředí limitně teploty T_1 a T_2 . Po vzájemném kontaktu obou prostředí na jejich rozhraní dochází k přenosu tepla z tělesa teplejšího (T_2) na těleso chladnější (T_1). Stejná (malá) změna teploty ΔT nastane v jednotlivých prostředích v čase t v hloubkách $l_1(t)$ a $l_2(t)$. Přitom musí být teplo přenesené do této hloubky za jednotku času rovno tepelnému toku rozhraním za tento čas t , tj.

$$\rho S l(t) c \Delta T = \lambda S \frac{\Delta T}{l(t)} t, \quad (5)$$

kde S je plocha rozhraní. Odtud je potom

$$l(t) = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho c} t} = \sqrt{\chi t}. \quad (6)$$

Hloubka průniku teploty do prostředí závisí podle tohoto zákona parabolicky na čase a lze vypočítat také teplotu T_0 , která se ustálí na rozhraní obou prostředí. Tepelný tok vycházející z teplejšího tělesa musí být roven tepelnému toku vstupujícímu do tělesa chladnějšího, tedy

$$\lambda_1 S \frac{T_0 - T_1}{l_1(t)} = \lambda_2 S \frac{T_2 - T_0}{l_2(t)}. \quad (7)$$

Odtud po dosazení z rovnice (6) je

$$T_0 = \frac{T_2 + \nu T_1}{1 + \nu}, \quad (8)$$

kde bezrozměrový koeficient ν je definován vztahem

$$\nu = \sqrt{\frac{\lambda_1 \rho_1 c_1}{\lambda_2 \rho_2 c_2}}. \quad (9)$$

Rovnici (8) pak můžeme použít pro aproximaci teploty na dotyku naší ruky a nějakého prostředí. Lidské tělo má receptory teploty umístěny v malé hloubce pod kůží a ty pak prakticky registrují teplotu rozhraní kůže – materiál. Vlastnosti lidského těla aproximujeme pro jednoduchost vlastnostmi vody, ze které je tělo z valné části složeno. Při dotyku těla o teplotě 36°C na tělese o teplotě 20°C přechází teplo z naší ruky do materiálu a předmět vnímáme jako chladnější – viz Tabulku 1 s vlastnostmi

látek a dotykovými teplotami. Dřevo se zdá na dotyk ruky „teplejší“ než kov, i když mají stejnou teplotu 20 °C. Naopak při dotyku rukou na těleso v sauně, kde je teplota kolem 100 °C, přechází teplo z tělesa do kůže ruky. Vede-li materiál teplo lépe, cítíme ho jako „teplejší“. Při teplotě 100 °C v sauně tak cítíme dřevěnou lavici jako „chladnější“ než kov, o který se v sauně zaručeně škaredě spálíme. Dotyková teplota na dřevěnou lavici je totiž 44 °C, teplota na dotyku s kovem potom již nebezpečných 94 °C. V sauně se proto používají materiály s malou teplotní vodivostí a nedotýkáme se tam kovových součástí.

Tabulka 1 Vlastnosti různých materiálů a dotykové teploty při kontaktu s lidskou rukou $T_1 = 36$ °C, teplota materiálů $T_2 = 20$ °C.

Materiál	c [J · kg ⁻¹ · K ⁻¹]	λ [W · m ⁻¹ · K ⁻¹]	ρ [kg · m ⁻³]	χ [10 ⁻⁷ m ² · s ⁻¹]	ν [-]	T_0 [°C]
Voda	4 180	0,63	1 000	1,5	1	28,0
Vzduch	1 010	0,026	1,2	210	0,0035	35,9
Dřevo	900	0,13	500	2,9	0,15	34,0
Žula	820	1,4	2 700	6,3	1,1	28,0
Hliník	896	236	2 700	976	15	21,0

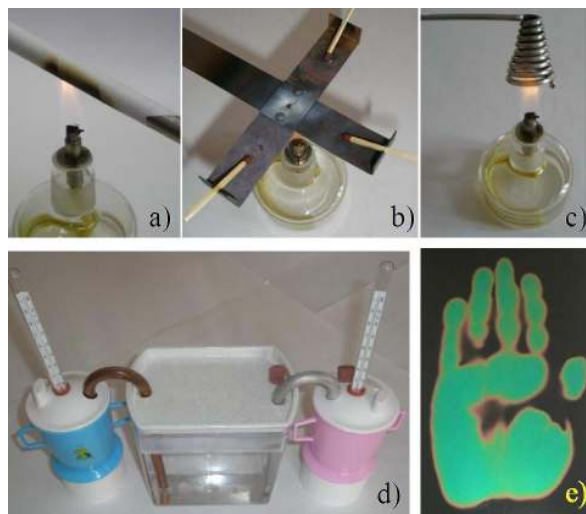
Experimenty na tepelnou vodivost

Existuje celá řada experimentů a školních demonstrací, které ukazují na různou tepelnou vodivost látek. Velmi často kombinují efekt vedení tepla a prostorového rozložení teploty. Vzhledem k tomu, že většinou nemáme možnost přímo zobrazovat rozložení teploty nebo tepelné toky, využívá se jiných fyzikálních vlastností jako je např. teplotní délková a objemová roztažnost, teplota tání nebo vzplanutí materiálu, průměrná teplota kapaliny, změna barvy kapalného krystalu atd. Mezi školní demonstrace tepelné vodivosti patří obvyklé experimenty s tepelnou vodivostí kovů (obr. 3):

- Nevzplanutí papírového pásku těsně motaného na kovové tyči zahříváné v plameni (obr. 3a). Teplo je zde rychle odváděno kovovou tyčí a nedojde tak ke vzrůstu teploty potřebné k zapálení papíru.
- Vedení tepla kovovým páskem/tyčí, kdy dosažení určité teploty je signalizováno táním voskových kuliček přilepených na pásku, nebo vzplanutím zápalky (obr. 3b).
- Zhasnutí plamene kahanu stíněného kovovou spirálou (obr. 3c).

- Zahřívání chladné vodní lázně od jiné teplejší lázně propojené kovovým tepelným můstkem (obr. 3d).
- Tepelná vodivost ve vrstvě kapalných krystalů, zobrazení rozložení teploty pomocí barvy krystalů (obr. 3e).

Čtenář si jistě doplní řadu dalších pokusů na demonstraci tepelné vodivosti. Poměrně zřídka lze vidět interaktivní exponáty, kde si lze tepelnou a teplotní vodivost vyzkoušet vlastníma rukama.



Obr. 3 Experimenty pro demonstraci tepelné vodivosti: a) Nevzplanutí papíru těsně namotaného na kovové tyči, b) tepelná vodivost v páscích různých kovů (mosaz, železo a měď), c) uhašení plamene kovovou spirálou, d) vedení tepla kovovým můstkem z teplejší kapaliny do chladnější, e) rozložení teploty po dotyku ruky na folii s kapalnými krystaly (barvy zobrazují teploty v rozmezí 25 – 30 °C). Experimenty b) až d) jsou z produkce firmy Ariane Schola.

Interaktivní nástěnka pro demonstraci dotykové teploty

Dotyková teplota je demonstrována na pěti rozdílných materiálech s teplotou okolního prostředí (obr. 4). Při dotyku rukou na panely dochází k odvodu tepla z ruky do panelu a všechny panely se tak zdají „chladnější“ než naše ruka. Zajímavé ovšem je, že různé materiály se zdají různě „chladné“ ačkoliv na připojených teploměrech si můžeme přečíst stejnou

teplotu všech panelů. Nejchladnější se zdá na dotyk kov (hliník, dural), dále pak žula, potom plast (Silon) a naopak nejteplejší jsou panely ze dřeva a tepelně izolačního plastu (Trovitex). Experimentátor si může dotykem ruky porovnat dotykové teploty jednotlivých materiálů a srovnat si svá pozorování s jejich skutečnou teplotou uvedenou na teploměru. Při dlouhodobějším přiložení ruky na kovový panel si také může zkontrolovat postupný nárůst teploty na tomto panelu. Teplo ruky je přenášeno vodivým kovem do panelu a postupně se jeho teplota zvýší až o několik stupňů. Nástěnka je doplněna textem s návodem k použití, vysvětlením pozorovaných jevů a výpočtem dotykové teploty pro dotyk ruky na různé materiály. Na doplnění je celý interaktivní exponát nasvícen pomocí LED pásků a při umístění na chodbě je osvětlení zapínáno pomocí pohybového čidla při přiblížení žáka.



Obr. 4 Interaktivní nástěnka demonstraci dotykové teploty na různých druzích materiálů – dole zleva panely materiálů: plast (Trovitex), kov (hliník), dřevo, žula, plast (Silon).

Závěr

Experimenty demonstrující tepelnou a teplotní vodivost látek jsou velmi efektní při výuce fyziky a často dávají obecně nečekané a překvapivé výsledky. Přehled běžně provozovaných demonstrací tepelné vodivosti jsme doplnili o nový interaktivní exponát ukazující názorně na vlastní zkušenosti rozdílnost teplotní vodivosti dobře a špatně tepelné vodivých látek jako jsou kov, žula a dřevo, plasty.

Poděkování

Autoři děkují za podporu grantu SGS FP-TUL 19/2012.

Literatura

- [1] A. V. Bjalko: Těplo tvojich ruk, Kvant (1987) č. 4, s. 3-7 (rusky).

Úlohy z termiky pro fyzikální olympioniky

PAVEL KABRHEL – IVO VOLF

ÚK FO, Univerzita Hradec Králové

Tematický celek Termika je součástí výuky fyziky jednak na základní škole, jednak na střední škole. V obou případech vychází z reálných představ žáků, ale výklad i následné řešení problémů je opřeno o dva základní pojmy, jejichž vysvětlení je poměrně nesnadné. Prvním pojmem je *teplota*. Patří mezi základní fyzikální veličiny v Mezinárodní soustavě jednotek (s jednotkou $^{\circ}\text{C}$ zejména na základním stupni vzdělávání a s jednotkou K, popř. $^{\circ}\text{C}$ na školách středních). Představu o veličině teplota vytváříme postupně od subjektivních vjemů až po vyjádření toho, že se změnami teploty dochází ke změně dalších fyzikálních veličin, jež jsou měřitelné a jež nám pomohou při měření teploty.

Dalším pojmem je *teplo*, které vystupovalo před 250 lety ve fyzikálních vědách jako „kalorikum“, tedy fluidum „bez tíhy, barvy a zápachu“, jehož zavedení však umožnilo vytvořit tzv. kalorimetrickou „směšovací“ rovnici, kterou používáme dodnes. Jako motivace i procvičení pak slouží základní úlohy, které vedou ke stanovení výsledné teploty t poté, co se dostanou do dokonalého tepelného kontaktu dvě tělesa, z nichž jedno o hmotnosti m_1 a teplotě t_1 je popsáno měrnou tepelnou kapacitou c_1 a druhé těleso o hmotnosti m_2 a teplotě $t_2 > t_1$, psáno měrnou tepelnou kapacitou c_2 . Použitá forma kalorimetrické rovnice je

$$m_1 c_1 (t - t_1) = m_2 c_2 (t_2 - t).$$

Odtud potom určíme výslednou teplotu t

$$t = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}.$$

Kromě toho nám kalorimetrická rovnice umožňuje stanovit jednak teplotu tělesa před procesem „směšování“, známe-li výchozí teplotu některého ze dvou těles a dosaženou výslednou teplotu, jednak určení měrné tepelné kapacity jedné z látek, dokonce i výpočet hmotnosti jednoho z uvedených těles, jejichž hmotnosti se vyskytují v kalorimetrické rovnici. Další možnost je v tom, že kromě výměny tepla můžeme v kalorimetrické rovnici najít i takové případy, kdy musíme vzít v úvahu i změny skupenství (tedy fázové přeměny). Tato problematika se spíše týká učiva středoškolského, kde uvádíme kvantitativní informace.

Fyzikální olympiáda na úrovni základního vzdělávání (tedy na základních školách a víceletých gymnáziích) vyžaduje, aby soutěžícím byly předkládány zajímavé, na základě jejich dosažených vědomostí a dovedností přiměřené, ale taky dostatečně náročné úlohy, kterými většinou nemohou být standardní úlohy z běžné výuky. Proto hledáme úlohy, jež těmto podmínkám vyhovují. U středoškolského vzdělávání pak úlohy tohoto typu a zaměření mohou uspokojit náročnější žáky, kteří se vyrovnají se základní úrovní a mají požadavky na řešení náročnějších problémů. V dalších odstavcích několik takových úloh předvedeme. Problémy v nich obsažené jsou takového rázu, že mohou naznačit: fyzika je opravdu kolem nás, jen ji musíme rozpoznat a zachytit.

Problém 1: Rychlovarná konvice



Při přípravě ranní kávy pro rodinu potřebujeme 1,2 litru vody o teplotě 95 °C. K ohřátí vody použijeme tzv. rychlovarnou konvici, na jejímž štítku je údaj o elektrickém příkonu (popř. o tepelném výkonu) konvice 1 800 W až 2 200 W. Protože dochází při zahřívání vody k tepelným ztrátám, odhadneme tepelnou účinnost konvice na 85 %. Když vodu nalijeme do konvice, ustálí se její teplota na hodnotě 15 °C. Stanovte, zda je možno horkou vodu získat do 5,0 min od zapnutí konvice.

Poznámky k vytvoření modelové situace: Při zahřívání vody v konvici o příslušný teplotní rozdíl využijeme vztahu pro výpočet tepla, $Q = mc\Delta t$. Teplo získáme na základě tepelných účinků elektrického proudu, $Q = P\tau$, kde τ je doba, potřebná pro ohřátí vody na příslušnou teplotu. Na ohřívání vody však využijeme v rychlovarné konvici jen $\eta = 85\%$.

Řešení: Napíšeme rovnici pro výměnu tepla:

$$P_0\eta\tau = mc\Delta t$$

Získaná hodnota po dosazení $c = 4200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ a střední hodnoty možného výkonu (příkonu) 2 000 W je $\tau = 237 \text{ s}$, tedy o něco méně než 4 min.

Problém 2: Ověření výpočtu

Situaci uvedenou v minulém problému si dovedeme nejen názorně představit, ale můžeme si ověřit, zda údaj, k němuž jsme došli, je reálný. Naplňte konvici vodou o objemu 1,2 litru, předpokládejme, že teplota vody tekoucí z vodovodu je opravdu 15 °C a že se rychlovarná konvice sama vypne při dosažení teploty o něco nižší než je teplota varu vody, tedy 95 °C. Určete potom, jaká je přibližně účinnost konvice.

Poznámky k vytvoření modelové situace: Stanovíme teoretickým výpočtem dobu, za níž by se voda na uvedenou teplotu ohřála bez ztrát tepla, a potom změříme reálnou dobu ohřívání vody, po níž se konvice sama vypne. Podíl těchto dvou údajů nás dovede k reálnější hodnotě účinnosti.

Řešení: Vyjdeme z údaje výkonu 2 000 W. Teoreticky zjištěná doba nutná ke zvýšení teploty vychází 202 s, naměřená doba nutná pro zahřátí je např. 250 s. Účinnost rychlovarné konvice nám poté vychází 81 %.

Problém 3: Jak se vaří káva na starém vařiči na chalupě?



Stejnou situaci tentokrát promítneme na chalupu, která je v mnoha domácnostech jakýmsi „odkladištěm“ starých přístrojů, nábytku a.j. Tam můžeme najít i prastarý vařič, který obsahoval keramickou vložku, do níž byl umístěn drát, stočený do šroubovice, který se při průchodu proudem rozžhavlil a sáláním přenášel teplo na dno plechového hrnku, ovšem ztráty dosahované na tomto vařiči, představovaly až 55 % spotřebované elektrické práce. Za jak dlouho bylo možno ohřát vodu v tomto zahřívacím zařízení?

Poznámky k vytvoření modelové situace: Celý problém není v podstatě úplně jiný – změnily se pouze některé fyzikální charakteristiky, zejména účinnost přenosu tepla, která dosahuje nyní hodnoty jen 45 %. Jinak použijeme stejného přístupu i stejných fyzikálních rovnic.

Řešení: Na základě výpočtu nám vyšla doba zahřívání na starém vařiči 448 s, tedy asi 7,5 min, přičemž se také zvětšila elektrická práce, kterou popíšeme „spotřebu elektřiny“, a to asi na dvojnásobek.

Problém 4: Vadná konvice se sama nevypnula

Stalo se jednou, že rychlovarná konvice z problému 1 se sama automaticky nevypnula a maminka ji musela vypnout ručně, a to až po 10 minutách. Popište kvalitativně i kvantitativně děje, k nimž mohlo dojít.

Poznámky k vytvoření modelové situace: Jestliže konvice zahřívala vodu po dobu 10 minut, voda v konvici se ohřála na 100 °C a potom se začala při této teplotě vypařovat. Určíme tedy objem vypařené vody.

Řešení: Práce po dobu 10 min, kterou vykonal elektrický proud, o hodnotě $W = P_0 \tau$, se projevila tepelnými účinky, takže vzniklo teplo $Q = P_0 \eta \tau$, číselně 1,02 MJ. Teplo potřebné k ohřátí vody z teploty 15 °C na 100 °C vychází 428,4 kJ, takže zbývá do uvedené hodnoty ještě 591,6 kJ. Měrné teplo varu (vypařování při teplotě varu) pro vodu činí 2,3 MJ · kg⁻¹, takže

podíl nám dává 0,257 kg, tedy z rychlovarné konvice se mohlo vypařit přibližně 0,257 litru vody a v konvici zbyl ještě skoro 1 litr vody o teplotě 100 °C.

Problém 5: Voda přitéká do vany



Do koupelnové vany může přitékat studená voda o teplotě 15 °C objemovým tokem 9,0 litrů za minutu a teplá voda o teplotě 75 °C objemovým tokem 6,0 litrů za minutu. Jaká bude teplota vody po ustálení výměny tepla, když voda přitékala 7,5 min?

Poznámky k vytvoření modelové situace: Úlohu budeme řešit tak, jakoby nedocházelo průběžně k výměně tepla či jakoby ve směšovacím ventilu nedocházelo k tepelným dějům, ale v našem modelu necháme odtéci zvlášť teplou vodu a potom zvlášť studenou. Teplé vody o teplotě 75 °C bude 45 litrů, studené vody o teplotě 15 °C bude 67,5 litru. Dále budeme pokračovat podle kalorimetrické rovnice.

Řešení: Výslednou teplotu určíme z kalorimetrické rovnice, $t = 39$ °C; nepředpokládáme tedy, že vana byla kovová a část tepla byla využita na ohřátí vany.

Problém 6: Voda přitéká do vany a v obýváku zvoní telefon

Do koupelnové vany přitéká vody stejně jako v minulém případě, ale poté, co uplynula doba 5,0 min, zaznělo zvonění pevné linky. Linda nechala vodu do vany natékat, ale odběhla si zavolat a zpátky se vrátila až po 12,0 minutách od začátku natékání. Jak se změnila teplota vody ve vaně?

Poznámky k vytvoření modelové situace: Voda přitékala kratší dobu do okamžiku, než Linda odběhla, ale delší dobu, než se zase vrátila zpět. Celkem nateklo do vany 72 litrů teplé vody a 108 litrů studené vody. Dále pokračujeme obdobně jako v předcházejícím případě.

Řešení: Použijeme stejného vztahu a získáme výslednou teplotu opět 39 °C. Důvodem jsou vstupní data (stejné teploty obou proudů vody, teplého i studeného), přičemž poměr minutových objemů vody zůstává stejný. Napíšeme-li podíl $m_1 : m_2$, potom tento poměr nezávisí na době přitékání. Horší situace je s celkovým objemem vody, který se zvýšil na hodnotu 180 litrů. Délka běžné vany je asi 1,6 m, šířka vany asi 60 cm, odtud

nám vychází, že ve vaně je hladina vody ve výšce necelých 2 dm (přesněji 18,75 cm). Ve vaně se může vykoupat i Linda (předpokládejme, že její hmotnost je 60 kg, objem asi 60 litrů, tedy hladina stoupne při ponoření celého jejího těla o 6,25 cm). Hladina vody bude asi 25 cm nade dnem vany.

Problém 7: Průtokový ohřívač



Do elektrického průtokového ohřívače v koupelně vstupuje voda o teplotě 15 °C a teplota vody vytékající z ventilu pro teplou vodu má teplotu 65 °C. Předpokládáme-li, že účinnost zahřívacího zařízení je 100 %, jaký minimální výkon musí mít ohřívač, jestliže z něj vytéká voda o minutovém objemu 0,6 litru/min.

Poznámky k vytvoření modelové situace: Při řešení tohoto problému na základní i na střední škole se objevuje potíže – jak úlohu zjednodušit pro případ, že do ohřívače vstupuje voda o počáteční teplotě 15 °C a vstupuje voda o teplotě 65 °C, takže se voda v průběhu průtoku ohřeje postupně o 50 °C. Úlohu zjednodušíme tak, že z kontinuálního průběhu uděláme děj diskretní. Vodu necháme po dobu 1 min natéci do ohřívače, potom 1 min necháme ohřívát a nakonec voda při získané teplotě vyteče, aby se na její místo dostala voda studená. Teplo, jež získá voda při ohřátí, nám potom umožní stanovit výkon.

Řešení: Teplo $Q = mc\Delta t = 126 \text{ kJ}$, doba trvání ohřevu je 60 s, výkon zahřívání 2,1 kW při stoprocentní účinnosti. Ve skutečnosti bude muset být výkon ohřívače větší.

Problém 8: Jak zvětšit přítok teplé vody?

V domácnosti bylo třeba zvýšit dodávku teplé vody z průtokového ohřívače v koupelně (tzv. bojleru), a tak byl dosavadní ohřívač nahrazen novým s tepelným výkonem 3,6 kW, ale současně byla snížena teplota vytékající teplé vody z bojleru na 60 °C. Jak se zvýšil průtok teplé vody při plně otevřeném ventilu?

Poznámky k vytvoření modelové situace: Byl zvýšen tepelný výkon o 75 %, při snížené výstupní teplotě (ohřívání jen o 45 °C namísto 50 °C) se musí projevit o 10 %. Potřebný objemový tok určíme výpočtem.

Řešení: Hmotnost protékající vody za 1 min označíme $m = V\rho$, kde $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, teplo potřebné za minutu k ohřátí vody $Q = mc\Delta t = V\rho c\Delta t$, když $Q = P\tau$. Po dosazení a po příslušných výpočtech je průtočný objem (objemový tok, minutový objem) $1,14 \text{ litru} \cdot \text{min}^{-1}$.

Problém 9: Radiátor ústředního topení



Přívodní trubka k radiátoru ústředního (etážového) topení v bytě má teplotu $80 \text{ }^\circ\text{C}$, z tohoto radiátoru odchází voda o teplotě $30 \text{ }^\circ\text{C}$. Odhadněme, že nuceným oběhem protéká radiátorem teplá voda s objemovým tokem $1,0 \text{ litru} \cdot \text{min}^{-1}$. Jaký je tepelný výkon radiátoru?

Poznámky k vytvoření modelové situace: Problém budeme řešit obdobně jako ohřívání vody, ale jde o ochlazování teplé vody procházející radiátorem. Opět přistoupíme k pulzačnímu uvažování – vodu necháme po dobu 1 min ochlazovat v radiátoru z teploty $80 \text{ }^\circ\text{C}$ na $30 \text{ }^\circ\text{C}$.

Řešení: Při průtoku 1 litru vody radiátorem za minutu musí být za tuto dobu odebráno teplo, které vyjádříme pomocí vztahu $Q = mc\Delta t = V\rho c\Delta t$, tedy 210 kJ , proces chlazení trvá 60 s , tedy tepelný výkon $P = Q/\tau = 3\,500 \text{ W} = 3,5 \text{ kW}$.

Problém 10: Na podzim se začíná topit

Je třeba stanovit, jaké situace při zahájení topné sezóny mohou v soustavě ústředního topení nastat a jak se postarat o to, aby všechny radiátory topily tak, jak to po nich požadujeme.

Poznámky k vytvoření modelové situace: Jedná se především o uvedení kotle do chodu, dále o tzv. odvzdušnění topného systému. Vysvětlíte, čemu všemu lze odvzdušněním zabránit. *Řešení:* Navštivte školníka ve vaší škole, popř. majitele některého rodinného domku, aby vás poučil o problematice ústředního nebo etážového topení.

Jestliže se vám naše úlohy zalíbily, můžete se těšit na pokračování, které máme pro vás již přichystáno.

INFORMATIKA

Vybrané podposloupnosti (Úlohy z MO – kategorie P, 30. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V našem seriálu putujícím po zajímavých úlohách Matematické olympiády - kategorie P se tentokrát zastavíme v krajském kole aktuálního 62. ročníku (školní rok 2012/2013). Objevila se zde jedna poměrně snadná úloha věnovaná problematice hledání vybraných podposloupností. Autorem úlohy i původního autorského řešení je doc. Zdeněk Dvořák z Matematicko-fyzikální fakulty UK v Praze. Primitivní řešení této úlohy vymyslí jistě každý z vás, je ale zajímavé zamyslet se nad možnostmi zlepšit jeho časovou složitost. Nejprve si jako obvykle ukážeme úplné zadání úlohy, které si pro potřeby našeho článku jen velmi mírně upravíme, aniž bychom tím ovšem změnilí smysl původní úlohy.

Král Filip vyráží na cestu po svém království. S ohledem na státnické povinnosti si už vybral, která města a v jakém pořadí navštíví. Výpravu ale komplikuje skutečnost, že král důsledně dodržuje dietu předepsanou královskými lékaři a astrology. Ti mu doporučili, kolik dní má cesta trvat, a předložili mu několik možných plánů, co má jíst v jednotlivých dnech cesty. V každém městě chce král jíst pouze místní specialitu. Ta je v každém městě právě jedna, nicméně stejná specialita může být k dostání ve více městech. Král se ovšem nemusí zastavit na jídlo v každém z navštívených měst. Pomozte mu určit, které z navržených dietních plánů lze realizovat.

Doprava mezi městy je velmi rychlá, není tedy žádné omezení na vzdá-

lenost mezi městy, v nichž se král Filip zastaví na jídlo. Města ale musí navštívit v předem určeném pořadí, nemůže se nikdy vracet ani dvakrát po sobě jíst ve stejném městě.

Popis vstupu

První řádek vstupu obsahuje přirozená čísla N , M , K a L , kde N udává počet navštívených měst, M je celkový počet druhů nabízených jídel, K je počet dietních plánů předložených k posouzení a L je jejich délka (počet jídel v každém z nich). Druhy jídel jsou očíslovány přirozenými čísly od 1 do M . Druhý řádek vstupu obsahuje N přirozených čísel udávajících, jakou specialitu nabízejí v jednotlivých městech v tom pořadí, v němž je král během své cesty navštíví. Na i -tém z K následujících řádků je L přirozených čísel popisujících i -tý dietní plán; j -té z těchto čísel určuje jídlo, které Filip musí jíst při své j -té zastávce na cestě.

Popis výstupu

Výstup se skládá z K řádků. Na i -tý z nich vypište slovo **ano**, lze-li během cesty realizovat i -tý dietní plán, v opačném případě vypište slovo **ne**. Dietní plán lze realizovat, jestliže vznikne z posloupnosti specialit nabízených v navštívených městech odstraněním některých čísel.

Příklad

Vstup:

```
10 4 4 3
1 2 1 3 4 1 2 1 3 4
1 4 2
4 3 2
1 1 1
4 4 4
```

Výstup:

```
ano
ne
ano
ne
```

Hodnocení

Plných 10 bodů získáte za řešení, které úlohu efektivně vyřeší pro N i $K.L$ řádově statisíce. Až 7 bodů získáte za řešení, které bude navíc předpokládat $M \leq 10$. Až 4 body získáte za řešení, které úlohu efektivně vyřeší za předpokladu, že $K.(N + L) \leq 100\,000$.

Nejdříve se budeme zabývat situací, že zkoumáme pouze jeden dietní plán a chceme zjistit, zda ho lze zrealizovat. Máme tedy zadání posloupnost specialit nabízených v jednotlivých městech královny cesty $s = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ a posloupnost jídel tvořících zkoumaný dietní plán $d = (d_1, d_2, \dots, d_L)$. Naším úkolem je zjistit, zda d je *vybranou posloupností* z posloupnosti s , tzn. zda lze posloupnost d získat vynecháním některých vhodných prvků z posloupnosti s při zachování vzájemného pořadí zbývajících prvků posloupnosti.

Uvedený problém vyřešíme snadno a přímočaře algoritmem s časovou složitostí $O(N + L)$. Budeme brát postupně jednotlivé prvky posloupnosti d a budeme je vyhledávat v posloupnosti s vždy od místa, kde jsme ukončili předchozí hledání. Začneme s číslem d_1 . Pokud se vůbec nevyskytuje v posloupnosti s , pak dietní plán d zjevně nelze realizovat. V opačném případě se může král zastavit na jídlo d_1 v prvním městě, kde ho nabízejí, a nic tím nezkazí. Na jídlo d_2 se pak může král zastavit až v nějakém následujícím městě. Opět nic nezkazí, když to bude hned nejbližší takové město. Stejně postupujeme i pro další prvky posloupnosti d . Jestliže takto dojdeme až na konec dietního plánu d a všechny jeho prvky se nám podaří v posloupnosti s vyhledat, pak lze tento dietní plán realizovat. Pokud tímto způsobem některý prvek posloupnosti d nenajdeme v s , potom plán realizovat nelze.

Popsané řešení snadno naprogramujeme:

```
function Nejblizsi(odkud: integer; hodnota: integer):
integer;
{hledá nejbližší pozici výskytu "hodnota" v N-prvkovém
poli "s", která následuje za pozicí "odkud"; když
nenajde, vrátí N+1}
var i: integer;
begin
  i:=odkud+1;
```



```

    while (i <= N) and (s[i] <> hodnota) do inc(i);
    Nejblizsi:=i
end;

function JedenPlan: boolean;
{řeší úlohu pro jeden dietní plán}
var kde: integer; {vybraná pozice v "s"}
    i: integer;
begin
    kde:=0;
    for i:=1 to L do
        begin
            kde:=Nejblizsi(kde, d[i]);
            if kde = N+1 then
                begin JedenPlan:=false; exit end
            end;
            JedenPlan:=true
        end;
end;

```

Od popsaneho řešení pro jeden dietní plán zbývá udělat už jenom malý krůček k vyřešení celé úlohy – stačí postupně aplikovat uvedený postup na všechny zadané dietní plány. Funkce *JedenPlan* tedy bude volána z hlavního programu nikoliv jednou, ale v cyklu K -krát, kde K označuje počet zkoumaných dietních plánů. Dostáváme tak primitivní řešení úlohy s časovou složitostí $O(K \cdot (N + L))$.

Řešení tohoto typu nevyžaduje žádné hlubší znalosti ani velké přemýšlení. V krajském kole 62. ročníku MO kategorie P byla řešení navržená tímto způsobem nejčastější ze všech. Podle podmínek uvedených v zadání úlohy jste za řešení s uvedenou časovou složitostí mohli v soutěži dostat nejvýše 4 body z celkových 10.

Při zkoumání každého dietního plánu zcela samostatně a odděleně od ostatních žádné efektivnější řešení zřejmě nevymyslíte. Časovou složitost algoritmu ale dokážeme snížit, když budeme mít hned od začátku na paměti, že potřebujeme prozkoumat velké množství dietních plánů. Vyplatí se nám proto vykonat předem (a tedy jenom jednou) tu práci, která na konkrétním dietním plánu nezávisí a kterou pak budeme moci pro jednotlivé dietní plány opakovaně využívat.

V našem případě si můžeme ušetřit práci spojenou s opakovaným procházením posloupnosti s a vyhledáváním různých hodnot v ní, tzn. mů-

žeme optimalizovat činnost, kterou vykonává pomocná funkce *Nejbližsi*. V různých dietních plánech se totiž opakovaně vyskytují stále stejná jídla a my tudíž během řešení úlohy v posloupnosti s vyhledáváme mnohokrát opakovaně tytéž hodnoty. Nabízí se proto provést vhodný předvýpočet, příslušné pozice nejbližších následujících výskytů různých hodnot jídel si spočítat dopředu a uložit si je v pomocném poli. Můžeme použít například dvojrozměrné pole P , které bude obsahovat přesně tytéž údaje, jaké výstupní hodnoty vrací funkce *Nejbližsi*. Při zkoumání každého dietního plánu pak stačí namísto opakovaného volání funkce *Nejbližsi* vždy jen vyzvednout příslušnou hodnotu z pole P v konstantním čase. Tím snížíme časovou složitost zpracování jednoho dietního plánu na $O(L)$ a řešení celé úlohy s K dietními plány na $O(K.L)$.

K tomu je třeba přičíst ještě čas potřebný na výpočet údajů uložených v poli P – ten se ovšem provádí pouze jednou a zvládneme ho vykonat v čase $O(N.M)$. Uvažované dvojrozměrné pole má totiž velikost $(N+1).M$ – je tvořeno $N + 1$ řádky odpovídajícími indexům *odkud* (od 0 do N) a M sloupci odpovídajícími číslům jídel *hodnota* (od 1 do M). Každý prvek pole přitom spočítáme v konstantním čase, když budeme obsah pole vyplňovat po sloupcích, a to vždy zdola nahoru. Jestliže totiž $s_{odkud+1} = hodnota$, pak $P[odkud, hodnota] = odkud + 1$, jinak $P[odkud, hodnota] = P[odkud + 1, hodnota]$.

```

procedure VytvorPole;
{vytváří pole P na základě údajů posloupnosti "s"}
var i, j: integer;
begin
  for j:=1 to M do
    begin
      P[N,j]:=N+1;
      for i:=N-1 downto 0 do
        if s[i+1]=j then P[i,j]:=i+1
          else P[i,j]:=P[i+1,j]
        end
      end
    end;
end;

```

Celková časová složitost tohoto řešení s polem je $O(N.M + K.L)$. Oproti původnímu jednoduchému řešení bude rychlejší za předpokladu, že počet nabízených jídel M je výrazně menší, než počet dietních plánů K . Pokud bude celkový počet jídel M naopak velký, pak nám řešení s polem P moc

nepomůže a jeho časová náročnost může být dokonce vyšší, než délka výpočtu úvodního primitivního řešení. Postup výpočtu využívající pole P každopádně představuje použití určité netriviální úvahy s předvýpočtem a v soutěži jste za něj proto mohli získat až 7 bodů z 10. Je zajímavé, že tento způsob řešení úlohy se mezi řešiteli olympiády téměř neobjevil – většina soutěžících skončila u primitivního řešení uvedeného na začátku článku, ti lepší se naopak dostali ještě dále, až k jednomu z efektivnějších postupů, které budou následovat.

Zkusme nyní urychlit naše výchozí řešení jiným způsobem. Při hledání každého jídla ze zkoumaného dietního plánu d jsme v něm museli postupně procházet posloupnost s a určovat v ní první další pozici města takovou, kde se toto jídlo nabízí. Abychom toto hledání urychlili, aniž bychom si museli vytvářet rozsáhlé pole P , můžeme si předem vytvořit M seznamů pozic měst, kde vaří jednotlivé speciality. Pro všechna j od 1 do M si označme $sezn[j]$ takový seznam odpovídající jídlu j . Tyto seznamy snadno získáme jedním průchodem posloupností s , kdy pro každý prvek si přidáme do příslušného seznamu $sezn[s_i]$ jeho pozici i . Časová složitost této fáze výpočtu bude $O(N)$ a všechny seznamy pozic navíc získáme rovnou vzestupně uspořádané.

```

procedure VytvorSeznamy;
{vytváří seznamy pozic jednotlivých hodnot v posloupno-
sti "s"}
var i, j, hodnota: integer;
begin
  for j:=1 to M do delka[j]:=0;
  for i:=1 to N do
    begin
      hodnota:=s[i];
      delka[hodnota]:=delka[hodnota] + 1;
      sezn[hodnota, delka[hodnota]]:=i
    end
  end;
end;

```

Pomocí vytvořených seznamů pozic dokážeme významně urychlit výpočet funkce *Nejbližsi* z úvodního řešení. Údaj *Nejbližsi(odkud, hodnota)* je roven nejmenšímu prvku seznamu $sezn[hodnota]$ většímu než *odkud*. Pokud v seznamu $sezn[hodnota]$ neexistuje prvek větší než *odkud*, pak $Nejbližsi(odkud, hodnota) = N + 1$. Hledaný údaj můžeme v přísluš-

ném seznamu nalézt půlením intervalů v logaritmickém čase vzhledem k délce seznamu, přitom délka všech seznamů je shora omezena délkou posloupnosti s . Každé volání funkce *Nejbližsi* tedy můžeme provést v čase $O(\log N)$. Celkové časová složitost tohoto řešení je proto $O(N + K.L \log N)$. Upravenou funkci *Nejbližsi* si zapíšeme pouze schematicky:

```
function Nejbližsi(odkud: integer; hodnota: integer):
integer;
{s využitím vytvořených seznamů hledá nejbližší pozici
výskytu "hodnota" v posloupnosti "s", která následuje
za pozicí "odkud"; když nenajde, vrací N+1}
var i: integer;
begin
  if sezn[hodnota, delka[hodnota]] <= odkud then
    Nejbližsi:=N+1
  else
    Nejbližsi := nejmenší prvek ze vzestupně uspořádaného
    seznamu sezn[hodnota,1], sezn[hodnota,2], ...,
    sezn[hodnota,delka[hodnota]] který je větší než
    "odkud" - vyhledat půlením intervalů
end;
```

Programem s touto časovou složitostí již zvládneme efektivně vyřešit každá vstupní data až do velikosti uvedené v zadání úlohy. Řešení tohoto typu se v soutěži objevila vícekrát a byla hodnocena až plným počtem 10 bodů.

Na závěr si ukážeme ještě jiný způsob řešení úlohy, který je založen na souběžném zpracování všech K zkoumaných dietních plánů. Budeme postupně procházet městy tvořícími posloupnost s a pro i -té město vždy určíme, jaký nejdelsí počáteční úsek z každého z dietních plánů může mít král již realizován po projití cesty s_1, s_2, \dots, s_i . Délku tohoto úseku v j -tém dietním plánu označíme jako $r_{j,i}$. Ukážeme si, jak budeme hodnoty $r_{j,i}$ počítat. Při příchodu do i -tého města prodloužíme realizované počáteční úseky těch dietních plánů, v nichž za dosud realizovaným počátečním úsekem následuje právě jídlo si. Pro takové dietní plány j tedy platí $r_{j,i} = r_{j,i-1} + 1$, zatímco pro ty zbývající je $r_{j,i} = r_{j,i-1}$. Zajímá nás, ve kterých dietních plánech bude platit po projití celé posloupnosti s , že $r_{j,N} = L$. Právě tyto dietní plány je možné realizovat.

Při implementaci popsaného algoritmu nebudeme ani potřebovat dvojrozměrné pole r . Hodnota $r_{j,i}$ totiž závisí pouze na bezprostředně předcházející hodnotě $r_{j,i-1}$, nikoliv na hodnotách starších. K uchování potřebných informací nám proto stačí jednorozměrné pole $r[j]$, v němž budeme hodnoty $r_{j,i}$ postupně přepisovat (tzn. zvětšovat je o 1, když bude třeba).

Přímočará implementace právě uvedeného postupu vede k řešení s časovou složitostí $O(N.K)$, jelikož provádíme N kroků výpočtu a v každém z nich testujeme všech K dietních plánů. Dostali bychom se tak k programu s obdobnou časovou složitostí, jakou mělo již naše výchozí primitivní řešení úlohy. Nabízí se ale lepší možnost. Do programu doplníme pro každé z nabízených jídel seznam čísel těch dietních plánů, v nichž je uvažované jídlo „na řadě“, tzn. v nichž uvažované jídlo bezprostředně následuje za již realizovaným počátečním úsekem. V i -tém kroku výpočtu pak stačí projít seznam odpovídající jídlu s_i a ten již přímo určuje čísla dietních plánů j , u nichž je třeba zvýšit hodnotu $r[j]$ o 1. Tato čísla dietních plánů je ovšem třeba zároveň přesunout do patřičného seznamu podle toho, jaké jídlo se v nich dostalo na řadu po prodloužení realizovaného úseku.

Takto upravené řešení vykoná v i -tém kroku tolik operací, jaká je aktuální délka seznamu pro s_i , neboli kolikrát se v tomto kroku zvýší některá z hodnot v poli r . Pole r má K položek a každá z nich se může zvýšit nejvýše L -krát, takže celkově se během výpočtu vykoná nejvýše $O(K.L)$ těchto operací. Do výsledné časové složitosti je třeba započítat ještě čas $O(N)$ potřebný na průchod posloupností s a čas $O(M)$ potřebný na inicializaci všech M seznamů pro jednotlivá jídla. Výsledná časová složitost je proto $O(K.L + N + M)$.

Řešení s touto časovou složitostí pracuje dostatečně efektivně pro všechna vstupní data podle zadání úlohy a v soutěži bylo hodnoceno plným počtem 10 bodů. Mezi řešeními odevzdanými v soutěži byla i řešení založená na této myšlence, byla ale dosti ojedinělá. Programovou realizaci tohoto posledního algoritmu zde již neuvádíme, podle uvedeného popisu ji jistě zvládne každý sám, nebo ji můžete nalézt na webových stránkách MO kategorie P na adrese <http://mo.mff.cuni.cz/p/62/resi-2.html>

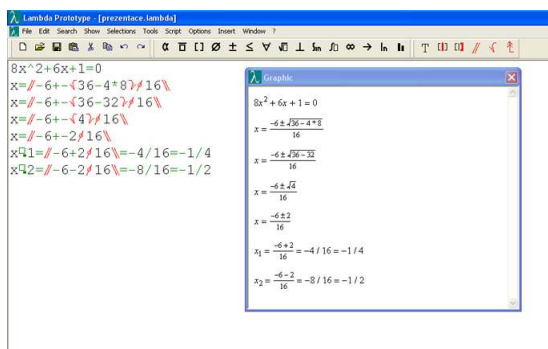
Adaptace matematiky pro nevidomé pomocí editoru Lambda

JAROMÍR TICHÝ – VÁCLAV VRBÍK

Fakulta pedagogická Západočeské univerzity, Plzeň

Nevidomým při studiu matematiky obvykle nepomáhají technologie, které běžně používají při práci se studijními materiály z jiných předmětů. Nevidomí studenti mají notebook vybavený hlasovým výstupem a braillovým řádkem.

Hlasový výstup se skládá ze screen-readeru a syntetického hlasu. Screen-reader je speciální software, který je možné instalovat do počítače. Umožňuje hlasově interpretovat veškerou práci uživatele v prostředí operačního systému [1]. Screen-reader funguje tak, že získává informace o činnosti nevidomého uživatele a následně je předává počítačovému hlasu [2]. Braillový řádek je přístroj většinou ve tvaru kvádrů. Pomocí malých jehliček převádí informace z počítače do Braillova písma [3]. Na obrázku 1 je zobrazen braillový řádek připojený k notebooku, na obrázku 2 je detailní záběr braillovského řádku [4].



Obr. 1



Obr. 2

Použití obou uvedených technologií je při studiu matematiky problematické. Hlasový výstup umožňuje čtení pouze běžného textu, ale nedokáže přečíst složitější matematické výrazy. S matematikou je možné pracovat s použitím braillova řádku. Nevidomí studenti si mohou matematické výrazy zapsat s použitím různých softwarových nástrojů, které umožňují převod matematických symbolů do příslušné národní normy Braillova písma. Někteří nevidomí studenti čtou s použitím braillova řádku zdrojové kódy typografického systému LaTeX, či si vytvářejí vlastní transkripční kódy pro záznam a editaci matematických výrazů [5]. Práce s matematickými výrazy je však v Braillově písmu obtížná. Vzhledem k charakteru braillova řádku musí být každý matematický výraz linearizován. V takto upraveném zápisu se nevidomý student obtížně orientuje. Převod matematiky do Braillova písma také ztěžuje způsob řešení matematických příkladů. Nevidomí studenti nemohou při řešení využívat krátkodobou vizuální paměť, neboť na braillovém řádku není možné sledovat „dva řádky najednou“. Nevidomý se nemůže podle své potřeby vracet k předchozímu zápisu. Každý řádek příkladu je nutné nejdříve zkopírovat a až poté jej postupně upravovat. Tento postup se opakuje, dokud není příklad vypočítán. Při výpočtech pomocí Braillova písma musí handicapovaný student také stále kontrolovat, zda nezapomněl zapsat značky pro začátky a konce zlomků, odmocnin a dalších matematických výrazů.

Absence zrakové kontroly ztěžuje nevidomému zápis matematických výrazů v průběhu výkladu. Ve většině případů využívá nevidomý student

individuální formu výuky. Pedagog či přednášející mu diktuje poznámky z matematiky do notebooku tempem a způsobem, které jsou pro nevidomé vyhovující. Pro vyučující je však většinou linearizovaný matematický výraz zobrazený na monitoru notebooku nepřehledný a je pro ně obtížné sledovat postup nevidomého při řešení matematických příkladů.

Editor Lambda

V rámci projektu Lambda byl v roce 2002 zahájen vývoj softwaru, který by umožnil eliminovat výše popsané obtíže nevidomých studentů matematiky. Projektu se zúčastnilo 15 partnerů z osmi zemí. V roce 2005 se do něj zapojila také Česká republika prostřednictvím střediska Teiresiás. Výsledkem projektu byl editor Lambda [6]. Ten převádí matematické výrazy do zvukové podoby prostřednictvím hlasového výstupu, do Braillova písma za pomoci braillského řádku a do grafické podoby pro vidící uživatele. Je vybavený funkcemi, které mohou nevidomým studentům při studiu matematiky velmi pomoci [7]. Editor Lambda interně pracuje s tzv. kódem Lambda, který je založen na značkovacím jazyce MathML verze 2.0. Nad ním funguje samotný editor, který dokument v kódu Lambda nezobrazuje. Převádí jej do příslušné národní osmibodové normy Braillova písma, kterou si zvolí uživatel [7]. Zajišťuje také grafické zobrazení dokumentu na monitoru počítače a jeho předčítání počítačovým hlasem. Převod matematických výrazů do zvukové podoby lze realizovat dvěma způsoby:

- Matematický výraz je nejdříve „převeden na textový řetězec“ a poté zaslán přímo hlasovému syntetizéru.
- Matematický výraz je nejdříve „převeden na textový řetězec“ a poté je zaslán přes speciální program pro hlasový výstup přímo screen-readeru. Ten jej pak předává hlasovému syntetizéru.

Pokud si nevidomý zvolí druhý způsob, je text přečten hlasem, který má ve svém screen-readeru nastavený podle svých potřeb.

Využití funkcí editoru Lambda při řešení problémů nevidomých studentů matematik

Pro řešení problému s obtížnou orientací v linearizovaném zápisu matematického výrazu byl editor Lambda vybaven speciální funkcí, která umožňuje průchod struktury matematického výrazu. Jednotlivé části matematických výrazů je možné postupně rozkrývat a skrývat. Celý proces

je zobrazován na braillském řádku [7]. Nevidomý student matematiky tak může snadno strukturu matematického výrazu porozumět, což mu velmi usnadní práci.

Příkaz pro automatické duplikování řádku pomáhá nevidomým, kteří nemohou na braillském řádku sledovat „dva řádky příkladu najednou“. Tato funkce automaticky zkopíruje obsah posledního řádku příkladu a odstraní přebytečné mezery [7]. Je tak zajištěno, že při opakovaném kopírování jednotlivých řádků matematického výrazu nedochází k neúmyslným chybám.

Lambda je také vybavena funkcí, která zajišťuje, aby nevidomý student při výpočtech pomocí Braillova písma nemusel stále kontrolovat, zda nezapomněl zapsat značky pro začátky a konce zlomků, odmocnin a jiných matematických výrazů. Automatické doplňování značek funguje jako prevence tvorby strukturních chyb, které mohou vznikat při zápisu matematického výrazu [7].

Velkým přínosem softwaru Lambda je také to, že jeho rozvržení velmi usnadňuje komunikaci mezi vyučujícími a nevidomým studentem. Editor Lambda zobrazuje dokument s matematickými výrazy ve dvou samostatných oknech. V levém okně je zobrazení, které napodobuje zápis na braillském řádku. V pravém okně je klasický nelinearizovaný zápis [7]. Vyučující má v pravém okně přehled o tom, s jakým matematickým výrazem nevidomý pracuje. Levé okno mu umožňuje lépe sledovat práci nevidomého studenta s matematickým výrazem převedeným do Braillova písma, což je zřejmé z obr. 3.

Lambda je vybavena prostředím pro práci s maticemi a vlastním kalkulátorem. Nabízí také nastavení vlastních klávesových zkratk, schopnost rozšířit aktuální výběr na celý logický blok matematického výrazu, možnost vytvoření záznamu série příkazů fungujících jako znovupoužitelná makra a mnoho dalších funkcí [7].

Problémy se zaváděním výuky matematiky pomocí editoru Lambda na základních, středních a vysokých školách

První problém – nedostatečný důraz na výuku Braillova písma

Pro efektivní využívání editoru Lambda je nutná dobrá znalost Braillova písma. Výuka hmatového čtení je však velmi náročná. Nevidomý musí své čtecí dovednosti trénovat několik let, aby mohl Braillovo písmo používat pro své studium. Osvojování Braillova písma je postupné. Nejdříve je nutné dlouho cvičit hmat, aby bylo možné jednotlivé znaky bodového



Obr. 3

písma bez potíží rozpoznávat. Obvykle trvá několik let, než se rychlost hmatového čtení přiblíží rychlosti průměrných čtenářů černotisku. Práce se složitějšími matematickými výrazy může být zahájena až v době, kdy nevidomý čte Braillovo písmo bez chyb a dostatečně rychle.

V současné době není v našem vzdělávacím systému kladen na výuku hmatového čtení příliš velký důraz. Nevidomí žáci často předpokládají, že se při svém studiu budou moci spoléhat především na hlasový výstup. Tento software však neumožňuje převod složitějších matematických výrazů do zvukové podoby. Matematické výrazy mohou být v současné době předčítány pomocí editoru Lambda, ale jejich poslouchání je velmi náročné. Praxe ukazuje, že při studiu matematiky je nutné hlasový výstup kombinovat s hmatovým výstupem. Tuto skutečnost si však zpočátku mnoho nevidomých žáků neuvědomuje a schopnost čtení Braillova písma dostatečně nerozvíjí. Speciální pedagogové v současné době do individuálních učebních strategií nevidomých žáků většinou nezasahují.

Nevidomí žáci by měli již v průběhu docházky na základní školu využívat svůj hlasový výstup. Při výuce matematiky a jazyků by ale měli pracovat především v Braillově písmu, i když je studium s pomocí hmatového čtení zpočátku obtížné. Velmi důležitá je role speciálních pedagogů,

kteří by na prvním stupni základní školy měli žáky k používání Braillova písma motivovat především prostřednictvím hry. Na druhém stupni základní školy, na středních a vysokých školách je nutné, aby nevidomí své čtecí dovednosti stále rozvíjeli. Při studiu nových matematických výrazů by se postupně měli učit potřebné znaky v Braillově písmu, s jejichž pomocí je možné matematiku zapisovat.

Pro rozvoj výuky Braillova písma je velmi důležitá role středisek, která působí při vysokých školách. Pracovníci těchto zařízení mohou ovlivnit metody výuky nevidomých žáků a studentů pořádáním školicích seminářů, vydáváním odborných publikací, účastí na různých konferencích a také vedením diplomových a bakalářských prací zaměřených na tuto problematiku.

Druhý problém – v editoru Lambda chybí funkce pro vysokoškolskou matematiku

Vývoj softwaru Lambda byl zaměřen především na středoškolskou matematiku. V současné době přestal být financován, a proto nepokračuje. Nevidomým studentům chybí funkce, které by zpřístupnily některé specializované oblasti vysokoškolské matematiky. Kvůli tomu nelze Lambdu využít na vysokých školách, kde jsou v rámci výuky zařazeny složitější matematické disciplíny. Absence funkcí pro vyšší matematiku může vést také k tomu, že Lambdu odmítnou někteří studenti středních škol, neboť vědí, že jim tento software již na vysoké škole nebude pomáhat. Mezi další technické nedostatky patří to, že Lambda není v současné době kompatibilní s některými screen-readery.

Technické nedostatky Lambdy vedou k tomu, že někteří studenti středních a vysokých škol tento editor nevyužívají. Hledají jiné strategie, které by jim umožnily pracovat s matematickými výrazy. Pomocí braillovského řádku čtou zdrojové kódy LaTeXu či si vytvářejí navzájem nekompatibilní transkripční kódy, s jejichž pomocí zapisují matematiku ve standardních textových editorech. To ale přináší mnoho obtíží [5].

Velmi prospěšná by byla společná snaha středisek působících při vysokých školách. Pracovníci těchto zařízení by mohli dojednat částečné či úplné otevření zdrojového kódu editoru Lambda. Naprogramování chybějících funkcí a zajištění kompatibility s větším počtem screen-readerů by Lambdu zpřístupnilo většímu počtu nevidomých studentů středních a vysokých škol.

Závěr

S obtížemi při studiu matematiky se setkávají nevidomí žáci základních škol a studenti středních i vysokých škol. Matematické předměty nejsou jen součástí technických a přírodovědných oborů na vysoké škole, na humanitně orientovaných studiích je matematika také často vyučována. Je proto důležité pokusit se zapojit editor Lambda do výuky nevidomých. Klíčovou roli mají v tomto procesu střediska působící při vysokých školách. Právě v těchto zařízeních úzce spolupracují pedagogičtí odborníci se specialisty v oblasti výpočetní techniky.

Literatura

- [1] Screen readers. Otevřete svůj web všem [online]. [2008] [cit. 2013-01-29]. Dostupné z: <http://www.pristupnost.cz/screen-readery/>
- [2] *Břinda, K.*: Speciální výpočetní technika pro uživatele se zrakovým postižením. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-, 3. 4. 2012 [cit. 2013-01-29]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Speci%C3%A1ln%C3%AD_v%C3%BDpo%C4%8Detn%C3%AD_technika_pro_u%C5%BEivatele_se_zrakov%C3%BDm_posti%C5%BEen%C3%ADm
- [3] Braillové řádky. Otevřete svůj web všem [online]. [2008] [cit. 2013-02-01]. Dostupné z: <http://www.pristupnost.cz/brailloved-radky/>
- [4] *Bubeníčková, H.* – *Kabelka R.*: Braillové řádky. Přístupný web nejen pro zrakové postižené [online]. 2008 [cit. 2013-01-30]. Dostupné z: <http://blindfriendly.cz/brailloved-radky>
- [5] *Šimek, R.*: Matematika pro nevidomé: Počítačová podpora výuky a návrh české osmibodové normy. Brno, 2008. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Fakulta informatiky. Vedoucí práce doc. RNDr. Ivan Kopeček, CSc. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/72798/fi_m/diplomova_prace.pdf.
- [6] Úvodní strana informačního portálu. Středisko pro pomoc studentům se specifickými nároky [online]. © 2008 [cit. 2013-02-01]. Dostupné z: <http://www.teiresias.muni.cz/czbraille8/>
- [7] Matematický editor Lambda. Středisko pro pomoc studentům se specifickými nároky [online]. ©2008 [cit. 2013-02-01]. Dostupné z: <http://www.teiresias.muni.cz/czbraille8/?strana=lambda>

ZPRÁVY

Ústřední kolo 62. ročníku MO, kategorie A

Organizací ústředního kola 62. ročníku Matematické olympiády v kategorii A byla v letošním roce pověřena Krajská komise MO kraje Vysočina. Garantem soutěže, která se konala od 17. do 20. března 2013 v Jihlavě, bylo Gymnázium Jihlava. Slavnostní zahájení se uskutečnilo v neděli 17. března 2013 v EA Business hotelu Jihlava, kde byli také všichni soutěžící a členové Ústřední komise MO po dobu soutěže ubytováni. Zahájení soutěže se zúčastnili kromě organizátorů, členů ÚK MO také zástupci kraje Vysočina, statutárního města Jihlava a dále zástupci významných sponzorů, mezi něž patřil především Motorpal Jihlava, zde zastoupený jeho generálním ředitelem RNDr. Milanem Medonosem.

Na základě jednotné koordinace úloh krajského (II.) kola v kategorii A pozvala ÚK MO k účasti ve III. nejlepších 48 úspěšných řešitelů II. kola z celé České republiky, jeden z nich se předem omluvil. Svého zástupce v ústředním kole soutěže neměl tentokrát pouze Karlovarský kraj. Soutěžními dny byly letos 18. a 19. března 2013. Na řešení obou trojic soutěžních úloh měli soutěžící již tradičně vyhrazeny vždy 4,5 hodiny čistého času. Za každou úlohu mohli přitom získat maximálně 7 bodů (s celočíselnými hodnotami).

Jihlavští organizátoři připravili pro účastníky ústředního kola soutěže zajímavý doprovodný program. Odpoledne po prvním soutěžním dnu byl pro všechny účastníky III. kola uspořádán autobusový zájezd do Třebíče s cílem navštívit Židovské historické centrum – významnou památku, která je vedena na seznamu kulturních památek UNESCO. Odpoledne po

druhém soutěžním dnu bylo vyhrazeno prohlídce památek města Jihlavy a večer pak shlédli účastníci III. kola divadelní představení „Přelet nad kukaččím hnízdem“ v Horáckém divadle.

Slavnostní vyhlášení výsledků a předání cen nejlepším soutěžícím se uskutečnilo ve středu 20. března 2013 ve Velkém gotickém sále jihlavské radnice. Předseda ÚK MO *doc. Jaromír Šimša* ve svém závěrečném projevu poděkoval předsedovi Krajské komise MO v kraji Vysočina *RNDr. Janu Benešovi*, řediteli Gymnázia Jihlava – *Mgr. Miroslavu Paulusovi* a jeho dalším spolupracovníkům, kteří zajišťovali zdařilý průběh ústředního kola 62. ročníku MO v kategorii A.

V další části uvádíme texty soutěžních úloh ústředního kola a přehled nejlepších řešitelů 62. ročníku MO v kategorii A.

18. března 2013

1. Najděte všechny dvojice celých čísel a, b , pro něž platí rovnost

$$\frac{a^2 + 1}{2b^2 - 3} = \frac{a - 1}{2b - 1}.$$

Pavel Novotný

2. Každý ze zbojníků v n -členné družině ($n \geq 3$) naloupil určitý počet mincí. Všechny naloupených mincí bylo $100n$. Zbojníci se rozhodli rozdělit kořist následujícím způsobem: v každém kroku dá jeden ze zbojníků po jedné minci jiným dvěma. Najděte všechna přirozená čísla $n \geq 3$, pro která po konečném počtu kroků může mít každý zbojník 100 mincí bez ohledu na to, kolik mincí jednotliví zbojníci naloupili.

Ján Mazák

3. V rovnoběžníku $ABCD$ se středem S označme O střed kružnice vepsané trojúhelníku ABD a T bod jejího dotyku s úhlopříčkou BD . Dokažte, že přímky OS a CT jsou rovnoběžné.

Jaromír Šimša

19. března 2013

4. Na tabuli je napsáno v desítkové soustavě přirozené číslo N . Není-li jednodemístné, smažeme jeho poslední číslici c a číslo m , které na tabuli zůstane, nahradíme číslem $|m - 3c|$. (Například bylo-li na tabuli číslo $N = 1024$, po úpravě tam bude $120 - 3 \cdot 4 = 108$.) Najděte všechna přirozená čísla N , z nichž opakováním popsané úpravy nakonec dostaneme číslo 0.

Peter Novotný

5. Je dán rovnoběžník $ABCD$ takový, že paty K, L kolmic z bodu D po řadě ke stranám AB, BC jsou jejich vnitřními body. Dokažte, že $KL \parallel AC$, právě když

$$|\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BDA| + |\sphericalangle ACD|.$$

Ján Mazák

6. Najděte všechna kladná reálná čísla p taková, že nerovnost

$$\sqrt{a^2 + pb^2} + \sqrt{b^2 + pa^2} \geq a + b + (p - 1)\sqrt{ab}$$

platí pro libovolnou dvojici kladných reálných čísel a, b .

Jaromír Šimsa

Výsledková listina ústředního kola 62. ročníku MO – kategorie A.

Vítězové:

1. *Štěpán Šimsa* (8/8, GJJ Litoměřice) 41 b., 2. *Radovan Švarc* (2/4, G Česká Třebová) 38 b., 3. *Josef Svoboda* (6/6, G Frýdlant n. O.) 37 b., 4. *David Hruška* (8/8, G Plzeň, Mikulášské nám.) 36 b., 5. *Tomáš Jareš* (6/8, PORG Praha 8, Lindnerova) 35 b., 6. *Martin Hora* (7/8, G Plzeň, Mikulášské nám.) 30 b., 7. *Michal Buráň* (8/8, GJAK Uherský Brod) 30 b., 8. *Hana Dlouhá* (8/8, GJK Praha 6, Parlérova) 29 b.

Úspěšní řešitelé:

9. *Mark Karpilovskij* (4/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše), 28 b., 10. *Martin Raszyk* (3/4, G Karviná) 28 b., 11. *Matěj Konečný* (6/8, G České Budějovice, Jírovceva), 27 b., 12. *Pavel Turek* (4/8, G Olomouc-Hejčín), 27 b., 13. *Lubomír Grund* (8/8, GChD Praha 5, Zborovská), 26 b., 14. *Tomáš Pavlín* (4/4, GJK Praha 6, Parlérova) 26 b., 15. *Dominik Teiml* (6/6, The English College, Sokolovská), 26 b.

Úspěšní účastníci:

16. *Ondřej Basler* (8/8, GJK Praha 6, Parlérova) 25 b., 17. *Tomáš Novotný* (7/8, G Česká Lípa) 25 b., 18. *Jakub Vančura* (4/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše), 24 b., 19. *Viktor Němeček* (6/8, G Jihlava) 22 b., 20. *Filip Bialas* (4/8, G Praha 4, Konstantinova) 21 b., 21. *Tomáš Lysoněk* (7/8, G Uherské Hradiště) všichni 19 b., 22. *Martin Sýkora* (8/8, G Praha 6, Nad Alejí) 19 b.

K účasti na výběrovém soustředění před 54. MMO, které se uskutečnilo tradičně počátkem dubna v Kostelci nad Černými lesy, bylo pozváno devět nejlepších soutěžících ústředního kola. Z nich pak bylo vybráno šestičlenné reprezentační družstvo pro aktuální ročník MMO, který se uskutečnil ve druhé polovině července v Kolumbii (Santa Marta). Na tomto soustředění bylo vybráno také šestičlenné družstvo (sestavené z dalších úspěšných řešitelů a úspěšných účastníků ústředního kola – nematurantů) pro 7. ročník MEMO (Středoevropské matematické olympiády). Ta se konala koncem srpna 2013 v maďarském Veszprému. Zprávy z obou uvedených mezinárodních soutěží nejdete v této rubrice v následujícím čísle našeho časopisu.

Jaroslav Švrček

Ústřední kolo 62. ročníku MO, kategorie P

Ústřední kolo 62. ročníku Matematické olympiády – kategorie P (programování) se konalo v Jihlavě ve dnech 20. - 22. 3. 2013. Navazovalo jako obvykle na ústřední kolo kategorie A. Osm studentů postoupilo do ústředního kola v obou těchto vrcholných kategoriích MO a mohli tak absolvovat obě soutěže na jednom místě a v průběhu jednoho týdne. Celé ústřední kolo Matematické olympiády výborně připravili a organizačně zajistili pracovníci gymnázia v Jihlavě. Zatímco soutěž kategorie A a také teoretická část kategorie P probíhaly v konferenčním sále hotelu, ve kterém byli všichni účastníci ubytováni, pro uspořádání praktické části soutěže jsme využili počítačové učebny jihlavského gymnázia. V prostorách gymnázia se pak uskutečnilo i závěrečné vyhlášení výsledků.

Soutěžní úlohy pro všechna kola letošního ročníku MO – kategorie P připravili pracovníci Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Pracovníci a posluchači MFF UK tvořili také převážnou většinu týmu, který se v Jihlavě postaral o opravování a vyhodnocení odevzdaných řešení a přípravu soutěžního prostředí pro praktickou část soutěže.

K účasti v letošním ústředním kole kategorie P bylo pozváno všech 27 úspěšných účastníků krajských kol. Dva z nich se omluvili, takže ústředního kola se nakonec zúčastnilo 25 soutěžících. Největší zastoupení měl kraj Praha se šesti účastníky a Jihomoravský kraj se čtyřmi účastníky. V prvním soutěžním dnu studenti řešili ve vymezeném čase 4,5 hodiny tři teoretické úlohy. Tato část soutěže má podobný charakter jako krajské kolo, zadané soutěžní úlohy jsou zaměřeny na návrh efektivního algoritmu. Jedna z nich vždy využívá neobvyklý výpočetní model zavedený pro celý ročník soutěže již v domácím kole. Druhý soutěžní den byl

praktický a probíhal v počítačových učebnách. Každý soutěžící pracoval na přiděleném osobním počítači se soutěžním prostředím a v průběhu 4,5 hodiny měl za úkol vyřešit dvě úlohy. Řešení praktických úloh je třeba dovést až do podoby odladených, plně funkčních programů. Odevzdané programy jsou po skončení soutěže testovány pomocí předem připravené sady testovacích vstupních dat. Tak se hodnotí nejen jejich správnost, ale pomocí nastavených časových limitů také rychlost výpočtu. Tímto způsobem lze v bodovém ohodnocení odlišit kvalitu různých řešení z hlediska časové složitosti zvoleného algoritmu. Praktická část ústředního kola MO-P probíhá za stejných podmínek a podle stejných pravidel, jako jsou organizovány i mezinárodní středoškolské olympiády v informatice.

V prvním soutěžním dnu bylo možné získat za každou úlohu nejvýše 10 bodů, praktické úlohy v druhém soutěžním dnu byly hodnoceny nejvýše 15 body. Celkem tedy mohl soutěžící obdržet maximálně 60 bodů. Na základě součtu dosažených bodů se stanoví výsledné pořadí, přičemž se ještě podle pomocných pravidel stanoví vzájemné pořadí těch soutěžících, kteří získali stejný počet bodů. Podle nového organizačního řádu Matematické olympiády byli úspěšnými účastníky vyhlášeni studenti, kteří se umístili na prvních 12 místech celkového pořadí (může to být nejvýše polovina z 25 účastníků). Z těchto dvanácti úspěšných účastníků byli první čtyři vyhlášeni vítězi ústředního kola a další čtyři úspěšnými řešiteli.

Výsledky ústředního kola 62. ročníku Matematické olympiády – kategorie P:

Vítězové

1. Štěpán Šimsa, 8/8, G J. Jungmanna, Litoměřice, 49 bodů, 2. Ondřej Hlavatý, 8/8, G J. V. Jirsíka, České Budějovice, 30 bodů, 3. Mark Karpilovskij, 8/8, G tř. Kpt. Jaroše, Brno, 29 bodů, 4. Martin

Raszyk, 3/4, G Karviná, 29 bodů

Úspěšní řešitelé

5. Jan-Sebastian Fabik, 3/4, G. tř. Kpt. Jaroše, Brno, 28 bodů, 6. Martin Hora, 7/8, G Mikulášské nám., Plzeň, 26 bodů, 7. Ondřej Cifka, 8/8, G Nad Alejí, Praha 6, 23 bodů, 8. Vojtěch Hlávka, 8/8, G a ZUŠ Šlapanice, 23 bodů

Úspěšní účastníci

9. Lukáš Ondráček, 8/8, G Ostrava - Zábřeh, 22 bodů, 10. Anh Dung Le, 5/6, G Tachov, 19 bodů, 11. Václav Volhejn, 4/8, G J. Keplera, Praha 6, 18 bodů, 12. Michal Punčochář, 7/8, G Jirovcova, České Budějovice, 17 bodů

Ostatní účastníci

Dominik Smrž, 7/8, G E. Krásnohorské, Praha 4, 16 bodů, Ondřej Mička, 8/8, G Jirovcova, České Budějovice, 15 bodů, Ondřej Hübsch, 3/4, G Arabská, Praha 6, 14 bodů, Martin Mareš, 3/4, G Jihlava, 13 bodů, Tomáš Novotný, 8/8, G tř. Kpt. Jaroše, Brno, 12 bodů, Radovan Švarc, 6/8, G Česká Třebová, 12 bodů, Martin Španěl, 8/8, Arcibiskupské gymnázium, Praha 2, 9 bodů, Jaroslav Kňap, 7/8, G Turnov, 8 bodů, Jakub Svoboda, 7/8, G Komenského, Havířov, 8 bodů, Jan Soukup, 6/8, G J. Vrchlického, Klatovy, 7 bodů, Petr Poliak, 3/4, G Arabská, Praha 6, 6 bodů, Vojtěch Sejkora, 4/4, SPŠE Pardubice, 6 bodů, Vojtěch Vašek, 8/8, G K. V. Raise, Hlinsko, 5 bodů

Na základě výsledků dosažených v ústředním kole 62. ročníku Matematické olympiády – kategorie P byli vybráni čtyři nejlepší řešitelé, aby reprezentovali Českou republiku na 25. mezinárodní olympiádě v informatice IOI 2013. Soutěž se uskuteční v červenci 2013 v australském městě Brisbane. Další čtyři mladší úspěšní účastníci ústředního kola z řad nematurantů se zúčastní 20. středoevropské olympiády v informatice CEOI 2013. Ta se bude tentokrát konat v Chorvatsku v netradičním termínu až v polovině října 2013.

Podrobné informace o průběhu celého 62. ročníku MO kategorie P, kompletní výsledkovou listinu, texty soutěžních úloh a jejich vzorová řešení naleznete na Internetu na adrese <http://mo.mff.cuni.cz/>. Na stejném místě se můžete seznámit i se staršími ročníky této soutěže a také se všemi aktuálními informacemi týkajícími se kategorie P Matematické olympiády.

Pavel Töpfer
MFF UK, Praha

2. česko-polsko-slovenská MO juniorů

Počátkem roku 2012 dostala Ústřední komise matematické olympiády od polských kolegů pozvánku k účasti českého družstva na 1. česko-polsko-slovenské MO juniorů (CPS juniorů). Uvedená soutěž se poprvé uskutečnila v Mszaně Dolné (v polských Beskydech) v květnu 2012. Již během vlastní soutěže navrhli polští organizátoři zástupcům všech tří zúčastněných zemí možnost navázat na úspěšný 1. ročník soutěže hned v roce příštím. Pozvánku tehdy akceptovali zástupci všech tří zemí, a tak se od 13. do 16. května 2013 na stejném místě uskutečnil (na základě iniciativy polské strany) již 2. ročník CPS juniorů.

Soutěže se v obou ročnících zúčastnily šestičlenné reprezentační týmy Polska, Slovenska a České republiky. Polské družstvo bylo sestaveno z nejlepších řešitelů republikového finále polské Olympiady Matematyczne Gimnazjalistów odpovídající naší MO v kategorii C. České družstvo bylo sestaveno na základě žákovských výsledků dosažených ve II. (krajském) kole kategorie C v aktuálním ročníku MO a dále pak na základě dodatečného výběrového soustředění, které se letos i v loňském roce uskutečnilo počátkem května v Malé Morávce (Jeseníky).

Tato nová mezinárodní soutěž mladých matematických talentů má dvě části, a to

vždy první soutěžní den probíhá jako soutěž jednotlivců, kdy žáci řeší v časovém limitu 4 hodin pětici původních matematických úloh. Druhý soutěžní den se koná soutěž tříčlenných týmů, přičemž v každém týmu je po jednom soutěžícím z každé země. Složení soutěžních družstev je vylosováno ihned po skončení soutěže jednotlivců. V horizontu 5 hodin pak jednotlivé týmy řeší šestici úloh (zadání první dvojice úloh jsou přitom napsána ve slovenštině, druhé dvojice úloh v polštině a třetí dvojice úloh je zadána v češtině). Svá řešení pak týmy odevzdávají v předem stanovených jazycích (po dvou opět slovensky, polsky a česky). Jednáním jazykem uvnitř jednotlivých družstev je ale nezřídka angličtina. V každém případě je tato týmová soutěž vítané novum, které podporuje mladé matematické talenty v dnes velmi důležité týmové práci.

České reprezentační družstvo na 2. CPS juniorů tvořili následující soutěžící: *Jan Gocník* (5/8) a *Marian Poljak* (5/8), oba G Jakuba Škody v Přerově, *Pavel Turek* (4/8) G v Olomouci-Hejčíně, *Filip Bialas* (4/8), G Opatov, Praha 4, *Jan Šorm* (5/8) z G v Brně na tř. Kpt. Jaroše a *Daniel Pišťák* (5/8) G Ch. Dopplera v Praze 5. Český tým na soutěž doprovázeli *doc. Jaromír Šimša* (z PřF MU v Brně), *dr. Jaroslav Švrček* a *dr. Pavel Calábek* (oba z PřF UP v Olomouci), kteří byli současně členy mezinárodní jury.

Je potěšitelné, že v letošním ročníku soutěže české družstvo prokázalo velmi dobrou kvalitu. Absolutním vítězem v soutěži jednotlivců se stal *Pavel Turek*, na velmi pěkném 5. místě skončil *Marian Poljak* a na místě 8. pak skončil *Jan Šorm*. *Pavel Turek* byl navíc také členem vítězného týmu v soutěži družstev.

K důkazu náročnosti soutěžních úloh předložených soutěžím na 2. CPS juniorů uvádíme texty celé pětice úloh pro soutěž jednotlivců. Veškeré další informace a také texty všech soutěžních úloh z obou ročníků soutěže můžete najít mj.

na stránkách polské Olimpiady Matematycznejne (<http://www.om.edu.pl>).

Soutěž jednotlivců – 14. 5. 2013

1. Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, které vyhovují rovnici

$$\sqrt{x - \sqrt{y}} + \sqrt{x + \sqrt{y}} = \sqrt{xy}.$$

2. Každé přirozené číslo je obarveno buď červenou barvou, nebo zelenou barvou tak, že jsou splněny následující dvě podmínky:

- Nechtě n je libovolné červené číslo, pak součet libovolných n (nikoliv nutně různých) červených čísel je také červené číslo.
- Nechtě m je libovolné zelené číslo, pak součet libovolných m (nikoliv nutně různých) zelených čísel je také zelené číslo.

Najděte všechna taková obarvení.

3. Je dán tětivový pětiúhelník $ABCDE$, kde $|AB| = |BC| = |CD|$. Označme K průsečík jeho úhlopříček AC , BE a L průsečík jeho úhlopříček AD , CE . Dokažte, že $|AK| = |KL|$.
4. Určete největší dvojmístné číslo d s vlastností: Pro každé šestimístné číslo tvaru \overline{aabbcc} je d dělitelem čísla \overline{aabbcc} , právě když d je dělitelem odpovídajícího trojmístného čísla \overline{abc} .
Poznámka. Číslice $a \neq 0$, b a c nemusí být nutně různé.
5. Nechtě M je střed strany AB ostroúhlého trojúhelníku ABC . Uvnitř strany AB je libovolně zvolen bod P . Označme S_1 a S_2 po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům APC a BPC . Dokažte, že střed úsečky S_1S_2 leží na ose úsečky CM .

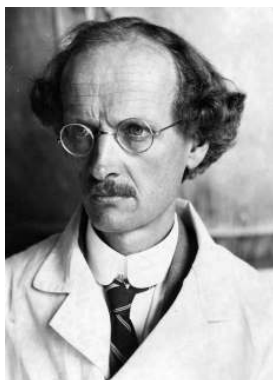
Jaroslav Švrček

Z HISTORIE

Auguste Piccard: průkopník moderního výzkumu ve stratosféře

„Není mým cílem lámat a držet rekordy, ale otevřít novou oblast vědeckého výzkumu.“

Auguste Piccard, 1931



Auguste Piccard (1884–1962)

Před půl stoletím, na jaře roku 1962 zemřel v Lausanne ve věku 78 let švýcarský vědec, fyzik, vzduchoplavec a vynálezce batyskafu *Auguste Piccard*, označovaný jako průkopník moderního výzkumu ve stratosféře. Celý svůj bohatý život věnoval vyučování studentů a výzkumu. Zprávy o jeho často dobrodružných letech v balonech zaplňovaly ve třicátých letech minulého století přední stránky světového tisku.

On a jeho dvojče *Jean Felix* se narodili v roce 1884 v Basileji, kde jejich otec působil jako profesor chemie na zdejší univerzitě. Již jako dítě se zajímal o vědu

a techniku, a tak po maturitě na gymnáziu studoval fyziku (jeho bratr organickou chemii) na Vysoké škole technické (ETH) v Curychu. Ve svých šestadvaceti letech získal inženýrský diplom a stal se na technice asistentem. V první světové válce sloužil zpočátku u letectva, později odešel do Curychu přednášet na vojenskou akademii. V letech 1917–1922 byl profesorem experimentální fyziky na své alma mater, v letech 1922–1939 a 1945–1954 pak profesorem aplikované fyziky na univerzitě v Bruselu. Za nacistické okupace Belgie se vrátil zpět do Švýcarska, kde pracoval jako konstruktér. V roce 1927 se zúčastnil slavné Solvayovy konference v Bruselu, kde se setkal a diskutoval s předními světovými učiteli.

Jako mladý fyzik studoval změny teploty vlivem působení tlaku a zabýval se i otázkami teploty plynu v balonu. Zajímal se o vzduchoplavbu a četl všechny dostupné časopisy a knihy věnované této problematice. V nich uveřejněné hodnoty rozdělení teplot uvnitř balonu se mu zdály být v rozporu s fyzikální teorií. Byl přesvědčen, že je nutno opravit měření v lepších podmínkách.

Aby mohl uskutečnit přesná měření, požádal Švýcarský aeroklub o povolení uskutečnit několik letů v obyčejném balonu. Do roku 1914, než jeho pokusy přerušila 1. světová válka, se vznesl do vzduchu šestkrát; měřil tlak i teplotu vzduchu. O stratosféru se začal zajímat již po roce 1912, kdy významný rakouský fyzik a pozdější nositel NC *Victor Franz Hess* při letu balonem Böhmen (byl naplněn vodíkem z místní chemičky a dosáhl výšky více než 5 km) v Ústí nad Labem definitivně dospěl k názoru o existenci kosmického záření. V letech 1926–1928 uskutečnil v balonech více experimentů, např. Michelsonův-Morleyho pokus (vedoucí k závěru, že rychlost světla je vždy stejná bez ohledu na orientaci, místo nebo dobu umístění experimentu) ve výšce 2 500 m s cílem zjistit rozdíly v rychlosti

světla při pohybu různými směry vzhledem k Zemi. Projektoval i letadla pro velké výšky. V roce 1927 si uvědomil, že letci létající ve výškách, kde je zředěný vzduch a nízký tlak, potřebují mít speciální utěsněnou kabinu udržující normální atmosférický tlak.

V roce 1930 se rozhodl studovat ve velké výšce kosmické záření. Podle svých vlastních výpočtů a poznatků zkonstruoval v červenci téhož roku stratosférický balon, tzv. *stratostat*, určený pro lety do stratosféry, zvláště důležité části atmosféry, nacházející se ve výškách nad 10 km nad hladinou moře. Uzavřenou gondolu balonu (naplněného vodíkem o objemu 14 tisíc krychlových metrů) tvořila zevnitř vyztužená dvoumetrová hliníková koule s okénky a dálkovým ovládáním přístrojů; byla vytápěna s pomocí slunečního záření a mohla se otáčet ke Slunci buď tmavou, či bílou polovinou. Kvůli nepříznivému počasí byl let odložen.

Spolu se svým asistentem, belgickým inženýrem *Paulem Kipferem* o rok později chystali 27. května 1931 v Ausburgu provést na stratosférickém balonu FNRS-1 před startem úpravy těsnosti, když se balon závanem větru utrhł a vystoupil s nimi do výšky 15 785 m. Nefungovala regulace teploty, tlaku a měřicí přístroje, poté začal docházet kapalný kyslík. Až při západu Slunce ochlazený balon začal klesat a přistál na ledovci v Rakousku.

Následující rok 18. srpna 1932 s belgickým fyzikem *Maxem Cosynsem* podruhé vzlétl v balonu, tentokrát ze švýcarského města Dübendorf. Dosáhli nového světového rekordu – 16 940 metrů. Další lety absolvoval také na žádost *Alberta Einsteina* s cílem zkoumat určité efekty související s teorií relativity. Celkem se Piccard podíval do stratosféry 27krát a jeho poslední rekord měl hodnotu 23 000 km. V průběhu všech letů shromáždil velké množství údajů, nejen o kosmickém záření, ale měřeními fyzikálních podmínek ve vrchních vrstvách atmosféry zkoumal

vznik ozónu, formování ozónové vrstvy, šíření radiových vln aj. Kromě toho fotografoval zemský povrch z do té doby nedostupné výšky a získal tak sérii jedinečných snímků.

Po posledním balonovém letu v roce 1937 se Piccard soustředil na konstrukci plavidla pro výzkum mořských hlubin, tzv. batyskafu. K práci, kterou přerušila druhá světová válka, se vrátil roku 1946 a o dva roky později byl první batyskaf založený na principu balonu hotov. Sestával z kovové nosné nádrže plněné benzinem, na níž byla zespuďu navěšena vodotěsná ocelová kulová kabina pro posádku a přístroje, a z uvolnitelné zátěže umožňující ponor a vynoření.

Piccard sestoupil dvakrát v Tyrhénském moři v letech 1948 a 1953 do hloubky 3 150 m. V letech 1952/1953 řídil v Terstu stavbu nového batyskafu Trieste, při které mu již pomáhal jeho syn *Jacques Ernest* (1922–2008), oceánolog, fyzik a vynálezce. Ten v něm 23. ledna 1960 sestoupil (klesal pět hodin) na dno Mariánského příkopu v Tichém oceánu do rekordní hloubky téměř 11 000 m. Šestasedmdesátiletý Piccard očekával synův návrat na palubě doprovodné lodi.

Pro úplnost ještě dodejme, že dobrodružství v krvi mají i další členové dynastie těchto odvážných vědců. Piccardův vnuk, švýcarský psychiatr Bernard (1958), jako první na světě obletěl v roce 1999 v balonu za 19 dní zeměkouli bez přistání; mluvílo se tehdy o tom jako „o posledním velkém dobrodružství 20. století“. Vzduchoplavectvím se zabýval i Piccardův bratr Jean Felix (1884–1963), vysokoškolský profesor chemie, žijící trvale v USA. Experimentoval s materiály pro výrobu balonů a podnikal balonové lety se svou manželkou Jeannette, která se v roce 1934 po dosažení výšky 17 550 m stala první ženou, jež dosáhla stratosféry a držitelkou ženského výškového rekordu (ten vydržel téměř 30 let – překonala jej až v roce 1963 sovětská kosmonautka Va-

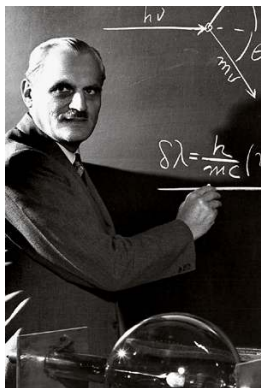
lentina Těřeškovová). Společně se synem Donaldem vyvíjeli balony plněné heliem a teplým vzduchem. Ten pak značnou měrou přispěl v 60. letech k rozšíření a celosvětové oblibě létání teplovzdušnými balony. Po Jeanově smrti se Jeannette stala konzultantkou a později mluvčí americké agentury NASA. Na jednu rodinu je to suma sumarum práce dost!

Bohumil Tesařík

A. H. Compton – muž v pozadí projektu Manhattan

Vesmír, který se systematicky rozpíná, svědčí o pravdivosti nejvznešenějšího výroků, jaký byl kdy pronesen: „Na počátku stvořil Bůh nebe a zemi“.

A. H. Compton



Arthur Holly Compton (1892–1962)

Na vývoji americké atomové bomby pracovalo koncem druhé světové války až 200 000 lidí ve 40 různých laboratořích či továrnách. Srdcem projektu Manhattan, jak se vývoj bomby nazýval, bylo místo zvané Los Alamos. Uprostřed něho, na náhorní plošině ve státě Nové

Mexiko, se v narychlo postavených objektech sešla tehdejší vědecká elita Spojených států i řady zemí okupovaných hitlerovským Německem. Na práci se podílelo přes dvacet stávajících nebo budoucích nositelů Nobelových cen za fyziku a chemii a další učenci světové proslulosti: *J. Chadwick, C. D. Anderson, J. Neumann, E. Fermi, E. O. Lawrence, R. Oppenheimer, L. Szilard, E. Teller, R. P. Freyman, V. Bush, J. Rotblat, H. A. Bethe, G. T. Seaborg, H. C. Urey, J. Franck, S. F. Rowland, V. Weisskopf...*

Poněkud ve stínu těchto známých „otců“ jaderné zbraně a symbolů atomového věku stojí americký fyzik *A. H. Compton*, který však měl jedno z hlavních slov při realizaci tohoto výzkumného úkolu. Spolu s *J. R. Oppenheimerem, E. Fermim* a *O. Lawrencem* patřil do zvláštní komise jaderných fyziků, která sehrála osudnou úlohu při rozhodování americké vlády o použití atomové bomby na japonská města Hirošimu a Nagasaki v roce 1945 a při dalším atomovém zbrojení. Dnes se má všeobecně za to, že shození atomových bomb na Japonsko již nebylo nevyhnutelně nutné pro ukončení války.

Arthur Holly Compton se narodil 10. září 1892 ve městě Wooster (stát Ohio) v rodině profesora filozofie a děkana na místní vysoké škole; jeho starší bratr *Karl Taylor Compton* (1887–1954) se později stal také fyzikem a prezidentem prestižního *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) ve městě Cambridge. Po absolvování bakalářských studií fyziky na koleji ve svém rodišti (*Wooster College*) pokračoval ve vzdělávání na univerzitě v Princetonu, kde se stal magistrem (1914) a posléze i doktorem (1916). Dva roky pracoval ve výzkumném ústavu společnosti *Westinghouse Lamp Company* v Pittsburgu, v roce 1920 se stal profesorem a vedoucím fyzikálního oddělení na univerzitě v St. Louis, odkud po třech letech odešel v roce 1923 na univerzitu v Chi-

cagu, kde působil jako profesor fyziky a ředitel laboratoře řešící problémy kontrolované řetězové reakce.

V podzemí chicagského univerzitního stadionu také *E. Fermi* zprovoznil 2. prosince 1942 první jaderný reaktor na světě. Za druhé světové války stál Compton v čele známé „Metalurgické laboratoře“, kde se rozvíjel přísně utajovaný uranový program. Základním úkolem bylo vypočítat, jakým způsobem je nutno umístit uran uvnitř grafitu, aby se reakce rozvinula (souběžně probíhající výzkum v Německu pod vedením *W. Heisenberga* skončil neúspěchem právě proto, že se jim nepodařilo správně spočítat tzv. kritické množství uranu potřebné pro řetězovou reakci). Po ukončení války byl v letech 1945–1953 rektorem univerzity ve Washingtonu, po roce 1954 zde působil jako profesor filozofie. Zemřel 15. března 1962 v Berkeley.

Největších vědeckých úspěchů dosáhl Compton ve výzkumu rentgenového záření. Od roku 1918 experimentálně zkoumal rozptyl záření a v roce 1923 oproti předchozím badatelům zjistil, že vlnová délka při průchodu grafitovým práškem se rozptylem mění. Tento jev také teoreticky vysvětlil. Výklad spočíval na kvantových předpokladech rentgenového záření a dosáhl vynikající shody mezi teorií a experimentem. Na počest svého objevitele se tomuto rozptylu říká Comptonův jev. Za čtyři roky po něm pojmenovaného fenoménu byl za významné objevy v oboru vlastností rentgenového záření oceněn v roce 1927 polovinou Nobelovy ceny za fyziku; druhou polovinu obdržel britský fyzik *C. R. R. Wilson* za objev mlžné komory.

Druhým významným Comptonovým objevem byla totální reflexe rentgenových paprsků a jejich ohyb na mřížkách. Umožnil-li první objev přesnější určení elektronové dráhy v atomu, druhý objev dovolil vypracovat přímou metodu měření vlnové délky rentgenového záření. Ve tři-

cátých letech se stalo důležitým zdrojem studia a objevování částic kosmické záření. Compton nezávisle na americkém fyzikovi *R. A. Millikanovi* a ruském vědci *S. N. Věrnovovi* objevil tzv. „šířkový efekt“, závislost intenzity kosmického záření na zeměpisné šířce. Na jeho počest je po něm pojmenována kosmická observatoř CGRO (*Compton Gamma Ray Observatory*), vypustěná v roce 1991 z raketoplánu Atlantis a sledující vesmír v gama oblasti spektrálních energií.

Zajímavý je názor některých amerických životopisců, že Compton, Szilard a patrně i další fyzikové, kteří se zúčastnili vývoje atomové bomby, byli zřejmě ovlivněni utopickým románem anglického spisovatele a zakladatele sci-fi literatury *H. G. Wellse*, který ve svém díle „*The World set Free*“ (Svět se stal volný) z roku 1914 v podstatě vývoj atomových zbraní předpověděl a domníval se, že jejich použití povede k utvoření lepšího světa. Sám Compton nabyl přesvědčení, že USA jsou povinovány učinit všechna opatření, aby se jaderné zbraně nedostaly nikdy do rukou totalitních režimů.

Historie však ukazuje, že snaha o uchování znalostí spojených s výrobou atomových zbraní v tajnosti selhala. Do deseti let vyrobily bombu SSSR (1949), Velká Británie (1952), Francie (1960) a Čína (1964). Od té doby se staly jadernými mocnostmi také Indie, Izrael, Pákistán, Severní Korea i Jižní Afrika. Na rozdíl od některých svých kolegů Compton nikdy nelitoval své účasti na výzkumu atomových zbraní. S některými jeho názory se později ztotožňoval americký prezident a horlivý bojovník proti komunismu *Ronald Reagan* ve svém projektu „hvězdných válek“. Nicméně stále i dnes platí slova amerického filozofa a spisovatele *R. W. Emersona* (1803–1882), že „míru nelze dosáhnout násilím, lze ho dosáhnout pouze pochopením“.

Bohumil Tesařík

LITERATURA

Průvodce tvorbou dokumentů



V současnosti masové rozšíření počítačů zpřístupnilo vytváření dokumentů i vydávání knih mnohem širšímu okruhu zájemců než tomu bylo v předpočítačové době. S tím je ovšem spojena skutečnost, že klesla typografická úroveň vydávaných tiskovin. Každý zdatnější uživatel počítačů by si měl přečíst i alespoň několik knih o typografii. Jedním z kandidátů na přečtení je právě kniha z nakladatelství Martin Štíř „Průvodce tvorbou dokumentů“, kterou napsali *Jiří Rybička*, *Petra Čačková* a *Jan Přichystal*.

Publikace vyšla v roce 2011 a má cca 224 str., 20 kapitol, seznam literatury, přehled pojmů a rejstřík. Jiří Rybička je rovněž znám uživateli editoru TeX pro sazbu vědeckých textů a hlavně matematiky, o němž napsal knihu.

Kniha začíná výkladem některých pojmů z typografie: písma, jednotek a měření, mezer, speciálních znaků a také tabulek, sazby matematiky, ale zabývá se také bibliografickými citacemi, pravopisem a jeho opravou a programy pro zpracování textů.

Tato část představuje asi polovinu knihy, druhá část je prakticky zaměřená. Čtenář se dozví, jak sázet jednotlivé prvky

textu, jaká je norma a jak je to realizováno v počítačové sazbě a ve třech programech: MS Word 2010, Adobe InDesign CS4 a LaTeX.

Pokud tedy někdo provádí sazbu, tak si může nalistovat příslušnou stránku a přečíst si, dejme tomu, jak se rozdělují slova, nebo zapisují čísla, uvozovky, zkratky, kalendářní data, matematické a chemické značky, předložky, mezery a další prvky textu. Na konci textu je přehled typografických pojmů, přehled literatury použité a literatury vhodné k dalšímu studiu a text o Československém sdružení TeXu, tedy občanském sdružení CSTUG, jehož posláním je podpora kvalitní sazby.

Vedle známých a velkých vydavatelů odborné literatury, kteří rovněž vydali texty o sazbě a typografií, vycházejí také skripta na našich univerzitách. Několik knih o TeXu a LaTeXu vydalo brněnské vydavatelství Konvoj.

Samostatnou disciplínou sazby a přípravy dokumentů je sazba matematických a vědeckých textů. Kniha proto logicky věnuje jednu kapitolku sazbě matematiky.

Je třeba zdůraznit, že kniha rozhodně není učebnicí sazby, nebo programů TeX, MS Word, popř. Adobe Design. Čtenář, který se tyto programy teprve učí, si tak musí najít jiné publikace.

Kniha je nepostradatelná pro každého, kdo hodlá zvýšit úroveň vlastních dokumentů, zabývá se přípravou dokumentů jiných autorů nebo přímo vydavatelskou činností. Knihu ale můžeme považovat jen jako jeden ze zdrojů informací. Začátečník v přípravě dokumentů se nemusí obávat, že by textu nerozuměl, ale musí počítat s tím, že se bude muset seznámit s typografickými pojmy. Jediné, co může čtenáři na knize vadit, je sazba s nadpisy na okraji stránky, což vedlo ke zúžení rádků, tudíž k většímu počtu stran a tedy dokonce k vyšší ceně knihy.

Karel Vašíček

Vychází ideální úvod do moderní fyziky pro laiky



Od svého založení v roce 1992 vydalo pražské Nakladatelství Slovart již více než tisíc titulů, převážně z oblasti populárně naučné literatury včetně řady překladů licenčních knih z produkce předních světových nakladatelství. Mimořádně úspěšnou ediční řadou je „50 myšlenek, které musíte znát“, ve které vyšlo v uplynulých čtyřech letech pět titulů (Matematika, Filozofie, Management, Psychologie, Digitální svět). V dnešní době internetu si sice může každý vyhledat jakoukoli potřebnou informaci, ovšem ne vždy seriózně ověřenou. Protože stále ještě „papírové“ knihy nezanikly, mohou publikace z této řady pomoci zájemcům v celkové orientaci a zamyšlení nad vybranými základními vědními obory, jejich myšlenkovým vývojem a jeho souvislostech s vývojem lidské společnosti.

Prozatím naposledy vydaný svazek má na obálce nápis „FYZIKA/ 50 myšlenek, které musíte znát“ (Slovart, Praha 2013, 1. vyd., 208 str.) a obsahuje opět pět desítek jasně a srozumitelně formulovaných úvah o dějinách fyzikálních objevů a o významu a principech fyzikálních zákonů a teorií, které vysvětlují nejen chování, ale i samotnou existenci našeho vesmíru.

Řecké slovo „fýsis“ znamená „příroda“, takže fyzika je vlastně věda o přírodě.

Toto označení vzniklo v době, kdy vědy o přírodě nebyly ještě rozlišeny. Nejdříve byla fyzika považována za součást filozofie („přírodní filozofie“), teprve až v 19. století se začal používat název fyzika v dnešním smyslu. Z mnoha současných obecných definic fyziky uvádíme jednu z nejnovějších, která se nám pro tento hodně široký pojem jeví jako nejuvěstičnější (I. Štoll: *Dějiny Fyziky*, Prometheus, Praha 2009): „Fyzika je základní věda o nejobecnějších vlastnostech přírodních objektů a zákonitostech přírodních jevů, která vychází z pozorování, zkušeností a experimentů, jejich výsledky zpracovává matematicky a své výpočty a teorie systematicky experimentálně ověřuje. Výsledky fyzikálního poznání slouží lidstvu v jeho technické a společenské praxi a z této praxe čerpá fyzika opět nové podněty a prostředky ke svému výzkumu.“

Bez ohledu na to, že fyzika (spolu s matematikou) patří k obtížným vědním disciplinám, neustále na ni všichni narážime i v každodenním životě. Plná překvapení je zvláště moderní fyzika (kde se slévají dva myšlenkové proudy - teorie relativity a kvantové fyziky), částečně se vracející ke svým filozofickým kořenům, když poskytuje na náš svět překvapivé pohledy, které zdánlivě odporují našim dosavadním zkušenostem a představám.

Autorka knihy je zkušená spisovatelka a v současnosti redaktorka prestižního mezinárodního vědeckého časopisu *Nature*, *Joanne Bakerová, Ph. D.*, která je obdařena nadáním „od Boha“ srozumitelně vysvětlit i ty nejsložitější a nejnáročnější problémy. Proto díky jasnému, čtivému a srozumitelnému textu se toto dílo může stát ideálním úvodem do moderní fyziky i pro laiky, kteří si ze školních let pamatují jen něco o tom, že se Archimédes rád koupal. Ve čtyřech tematických celcích (Hmota v pohybu, Fyzika vln, Kvantové hlavolamy, Dělíme atomy, Prostor a čas) seznamuje čtenáře s historickými milníky (bez chronologického uspořádání) v chá-

pání fyzikálního světa, jako jsou Keplerovy zákony pohybu těles, Newtonův gravitační zákon, Bernoulliho rovnice, Huygensův princip, zákony zachování energie a hybnosti, Brownův pohyb, teorie elektrických obvodů či indukční pravidla etc.

Zároveň ale také objasňuje místy až zářející závěry moderních vědeckých teorií - od Planckova zákona k Pauliho vylučovacímu principu, od Schrödingerovy kočky k teorii strun, antihmotě, jaderné fúzi, Hubbleovu zákonu, velkému třesku, Feynmanovým diagramům, Olbersovu a Fermiho paradoxu . . . Jednotlivé kapitoly jsou doprovázeny řadou užitečných informací, jako jsou biografie předních fyziků, časový

sled klíčových událostí daného oboru, názorná schémata a autentické citace. Znáte například Keplerův epitaf v Regensburgu „Měřil jsem nebe, nyní měřím stíny, myšlenkami ve hvězdách, tělem na zemi“ nebo myšlenku Nielse Bohra „Opakem pravdivého tvrzení je nepravdivé tvrzení. Ale opakem hluboké pravdy může být i jiná hluboká pravda“?

Knihla má fragmentární charakter. Proto ji také není nutné číst popořádku, svým způsobem je jakousi antologií. Můžeme v ní bez výčitek náhodně listovat a hledat ochranu před ztrátou paměti nebo získávat zcela nové vědomosti.

Bohumil Tesařík



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Moduly jako prostředek inovace v integraci výuky moderní fyziky a chemie

Na Katedře experimentální fyziky UP v Olomouci je řešen projekt s názvem Moduly jako prostředek inovace v integraci výuky moderní fyziky a chemie, OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0182. Partnerem projektu je Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity v Brně. Projekt byl zahájen k 1. 1. 2012 a bude ukončen 31. 12. 2014. Cílem projektu je inovace studijních programů Fyzika a Chemie jak v bakalářské etapě studia, tak i v magisterském studiu učitelství fyziky a chemie.

V rámci projektu jsou připravovány moduly zaměřené na integraci vybraných partií fyziky a chemie a moduly z problematiky „moderních“ partií fyziky. Jedná

se o následující témata: Klima a koloběhy látek, Fotokatalyzy aktivní povrchy, Nanotechnologie, Kriminální chemie a fyzika, Rheologie, Jak funguje věda, Projektová výuka – průřezová témata s přírodovědným zaměřením. Součástí všech modulů je nejen studijní materiál, ale také laboratorní experimenty.

Cílovou skupinou projektu jsou studenti bakalářského studia fyziky a chemie na Přírodovědecké fakultě UP v Olomouci a na Pedagogické fakultě MU v Brně, studenti fyziky a chemie se zaměřením na vzdělávání v magisterské etapě studia na obou vysokých školách.

Se všemi materiály, které vznikají v rámci projektu, se můžete seznámit na stránkách <http://mofychem.upol.cz/> a <https://sites.google.com/site/modulfyzika/> a také v rámci prezentací na domácích a zahraničních konferencích.