MATEMATIKA

O kostkových hazardních hrách

PAVEL TLUSTÝ – IRENEUSZ KRECH

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice – Uniwersytet komisji edukacji narodowej, Kraków, POLSKO

Pochopení základních principů hazardních her je jeden ze způsobů ochrany proti gamblerství. Umožňuje hráči racionálně myslet a vrátit se zpět do reality.

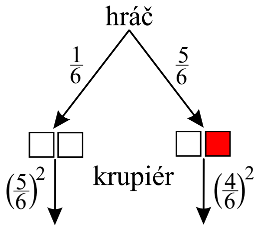
Hazardní hra je hra, jejíž výsledek závisí na náhodě. První zmínky o takových hrách najdeme v zemích Blízkého a Dálného východu již asi 4 tisíc let př. n. l. Kostkové hry byly velmi populární i ve starověkém Řecku a Římě. Ale teprve v 17. století matematici P. Fermat a B. Pascal, inspirováni problémy spojenými s hazardními hrami, začali řešit obecné otázky spojené s náhodou. Hledání racionálních herních strategií, optimálních rozhodnutí, zkoumání společných (i rozdílných) rysů více her, výpočet očekávaných zisků hráče a kasina atd., to byly problémy, které postupně vedly až ke vzniku zcela nové matematické disciplíny, kterou dnes známe jako *teorie pravděpodobnosti*. Ta v současnosti představuje velmi důležitou oblast matematiky, která jednak tvoří teoretický základ pro matematickou statistiku, ale má i široké pole praktických aplikací.

Cílem příspěvku je na třech konkrétních hazardních hrách ukázat základní ideu „pravděpodobnostního“ uvažování a metody řešení elementárních pravděpodobnostních úloh. Všechny tři níže uvedené úlohy jsou reálné hry, které pocházejí z nejrůznějších koutů světa.

Úloha 1 (2 kostky)

Hráč vsadí s Kč a dostane 2 hrací kostky, se kterými hodí. Pak hodí dvěma kostkami krupiér. Pokud krupiérovi padlo aspoň jedno stejné číslo jako padlo hráči, krupiér vítězí v dané hře a získává hráčem vsazenou částku. V opačném případě vyhrává hráč a krupiér mu vyplatí výhru $2s$ Kč. Je uvedená hra pro hráče výhodná?

Řešení. K posuzování výhodnosti nebo nevýhodnosti konkrétní hazardní hry se obvykle používá střední hodnota výhry (náhodné veličiny) hráče. Vypočítejme nejprve pravděpodobnost výhry hráče. K tomu využijeme obr. 1.



Obr. 1 Strom pro výpočet pravděpodobnosti výhry hráče

Při hodu dvěma kostkami mohou hráči padnout dvě stejná čísla, což nastane s pravděpodobností $\frac{1}{6}$ (na obr. 1 to schématicky značíme □□), nebo mu s pravděpodobností $\frac{5}{6}$ padnou dvě různá čísla (na obr. 1 to znázorňujeme □■). V prvním případě hráč vyhraje, pokud krupiérovi nepadne □, tj. může mu padnout kterékoli ze zbývajících pěti čísel. Ve druhém případě hráč vyhraje, pokud krupiérovi nepadne žádné z čísel □■, tj. může mu padnout kterékoli ze zbývajících čtyř čísel. Odtud dostáváme

$$P(\text{hráč vyhraje}) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{35}{72} \doteq 0{,}486.$$

Střední hodnota výhry hráče je tedy

$$EX = 2s \cdot 0{,}486 + 0 \cdot (1 - 0{,}486) = 0{,}972s.$$

Po skončení hry má hráč „v průměru“ méně než na začátku hry, a proto je tato hra pro něj nevýhodná. Krupiér získává v průměru

$$(1 - 0{,}972)s = 0{,}028s,$$

tj. 2,8 % ze vsazené částky.

Úloha 2 (12 kostek)

Hráč vsadí s Kč a dostane 12 hracích kostek, se kterými háže. Pokud mu padne aspoň jednou každé z čísel 1, 2, …, 6, kasino mu vyplatí $2s$ Kč. V opačném případě je vsazená částka ziskem kasina. Je uvedená hra pro hráče výhodná?

Řešení. Matematickým modelem uvedené hry je klasický pravděpodobnostní prostor (všechny možné výsledky hodu 12 kostkami považujeme za stejně pravděpodobné). V takovém prostoru je pravděpodobnost jevu dána podílem počtu výsledků jevu příznivých a počtu všech možných výsledků.

Hod 12 kostkami má celkem 6^{12} různých výsledků. Určíme počet výsledků, kdy nepadne každé z čísel $1, 2, \ldots, 6$.

Použitím *principu inkluze a exkluze* dostaneme, že takových výsledků je celkem

$$\binom{6}{1} \cdot 5^{12} - \binom{6}{2} \cdot 4^{12} + \binom{6}{3} \cdot 3^{12} - \binom{6}{2} \cdot 2^{12} + \binom{6}{5} \cdot 1^{12}.$$

Tedy číslo

$$6^{12} - \binom{6}{1} \cdot 5^{12} + \binom{6}{2} \cdot 4^{12} - \binom{6}{3} \cdot 3^{12} + \binom{6}{2} \cdot 2^{12} - \binom{6}{5} \cdot 1^{12}$$

představuje počet všech možných výsledků hodu 12 kostkami, v nichž padne každé z čísel 1, 2, …, 6 aspoň jedenkrát. Pravděpodobnost výhry hráče je

$$\frac{6^{12} - \binom{6}{1} \cdot 5^{12} + \binom{6}{2} \cdot 4^{12} - \binom{6}{3} \cdot 3^{12} + \binom{6}{2} \cdot 2^{12} - \binom{6}{5} \cdot 1^{12}}{6^{12}} \doteq 0{,}438.$$

Střední hodnota výhry hráče je tedy

$$EX = 2s \cdot 0{,}438 + 0 \cdot (1 - 0, 438) = 0{,}876s.$$

Po skončení hry má hráč „v průměru“ méně než na začátku hry, a proto je tato hra pro něj nevýhodná. Bankéř získává v průměru

$$(1 - 0{,}876)s = 0{,}124s,$$

tj. 12,4 % ze vsazené částky.

Úloha 3 (n kostek)

Hráč vsadí s Kč a může si zvolit své „šťastné číslo“ (od 1 do 6) i počet hracích kostek, s kterými bude házet. Pokud mu padne jeho šťastné číslo právě jednou, kasino mu vyplatí $2s$ Kč. V opačném případě je vsazená částka ziskem kasina. Kolika kostkami má hráč házet, aby jeho šance na výhru byla maximální? Je tato hra pro hráče výhodná?

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že možnost volby šťastného čísla je jen marketingový tah kasina. Ze symetrie je zřejmé, že nezáleží na tom, které z čísel 1, 2, …, 6 si hráč zvolí. Pravděpodobnostní model je pro všechna čísla stejný.

Předpokládejme, že hráč si vybral za své šťastné číslo třeba 3 a bude házet n kostkami. K tomu, aby vyhrál, je nutné, aby právě na jedné z n kostek padla 3. Tento jev nastane s pravděpodobností

$$n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}. \tag{1}$$

Zbývá určit, pro která n nabývá výraz (1) maximální hodnoty. Takové n musí splňovat nerovnosti

$$(n-1) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \leq n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

a

$$n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \geq (n+1) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n}.$$

Z první nerovnosti dostaneme podmínku $n \leq 6$, druhá nerovnost vede na podmínku $n \geq 5$. Vypočteme hodnoty výrazu (1) pro $n = 5$ a $n = 6$.

$n = 5:$

$$5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4} = \left(\frac{5}{6}\right)^{5} = \frac{3\,125}{7\,775} \doteq 0,402$$

$n = 6:$

$$6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5} = \left(\frac{5}{6}\right)^{5} = \frac{3\,125}{7\,775} \doteq 0,402$$

Optimální rozhodnutí je tedy házet pěti nebo šesti kostkami. V obou případech je pravděpodobnost hráčovy výhry 0,402.

Střední hodnota výhry hráče je

$$EX = 2s \cdot 0{,}402 + 0 \cdot (1 - 0{,}402) = 0{,}804s$$

Po skončení hry má hráč „v průměru“ méně než na začátku hry, a proto je hra pro něj nevýhodná. Bankéř získává v průměru téměř 20 % ze vsazené částky.

V současné době existuje celá řada nejrůznějších hazardních her – ruleta, keno, craps, chuck-a-luck, sportka, šťastných 10, různé kostkové hry, hrací automaty a mnohé další. Všechny tyto hry mají jedno společné –

jejich matematický model je vytvořen tak, aby „střední hodnota“ výhry byla pro provozovatele hazardní hry kladná. Tedy provozovatel hazardní hry (při mnoha opakováních této hry) má zaručen s velmi vysokou pravděpodobností zisk. To však v *žádném případě neznamená*, že musí být nutně všichni hráči ve ztrátě.

I když každá z uvedených hazardních her je pro hráče nevýhodná, přece jen mezi nimi existují významné rozdíly. Ty spočívají v tom, jaká část z hráčem vložené částky připadne „v průměru“ provozovateli hry. Rozumný hráč se pak samozřejmě snaží vybrat si takovou hru, kde je tento podíl procentuálně nejmenší. Následující tabulka ukazuje porovnání některých běžně dostupných hazardních her právě z tohoto úhlu pohledu.

název hry	podíl z hráčova vkladu, který připadne v „průměru“ provozovateli
francouzská ruleta	2,7 %
americká ruleta	5,3 %
chuck-a-luck	7,9 %
hrací automaty	od 20 % (v závislosti na typu)
keno, šťastných 10	i 50 % (v závislosti na výplatní tabulce)

Tab. 1 Porovnání „výhodnosti“ hazardních her

Racionální je tedy nehrát vůbec. Pokud se už rozhodneme hrát, tak si vybereme hru, ve které je střední hodnota výhry co možná největší. Na prohranou částku pak nahlížíme jako na poplatek za možnost si zahrát a pobavit se.

Literatura

[1] *Płocki, A., Tlustý, P.*: Kombinatoryka wokoł nas. 3. vydání. Wydavnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 2017.

[2] *Płocki, A., Tlustý, P.*: Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé. Prometheus, Praha, 2007.