Tětivové a tečnové pětiúhelníky

LENKA JUKLOVÁ – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V článcích [3] a [4], na něž náš příspěvek navazuje, jsou uvedeny (a příklady doplněny) některé zajímavé vlastnosti konvexních (speciálně též pravidelných) pětiúhelníků. V tomto příspěvku budou prezentovány na bázi řešených úloh méně známé vlastnosti tzv. *tětivových*, resp. *tečnových* pětiúhelníků, tj. pětiúhelníků, jimž lze opsat, resp. vepsat kružnici. Uvedené téma není obsahem základního učiva geometrie na našich základních a středních školách, přesto je tato problematika poměrně frekventovaná v různých matematických soutěžích pro žáky SŠ i ZŠ. Článek je určen především těm učitelům, kteří pracují s matematicky nadanými žáky, a také dalším zájemcům o uvedenou problematiku.

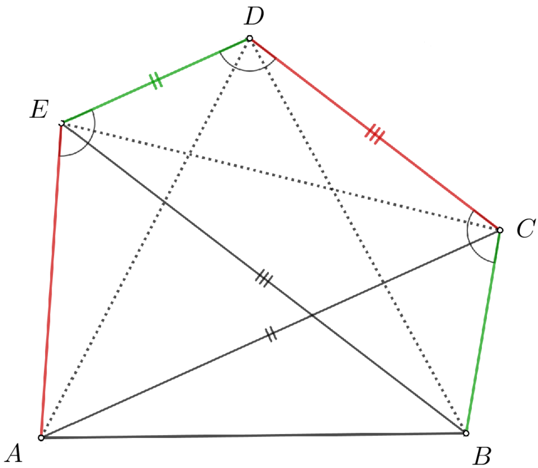
V další části uvedeme pětici řešených úloh, jež se týkají tětivových a tečnových čtyřúhelníků. Prezentované úlohy popisují jisté netriviální vlastnosti těchto speciálních pětiúhelníků. V jejich řešeních přitom podstatným způsobem využíváme (ze školské matematiky známé) vlastnosti tětivových a tečnových čtyřúhelníků.

Tětivové pětiúhelníky

Příklad 1 (XV. Matematický Duel, 2007, B–I–3, J. Švrček, viz [2])

Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ se shodnými vnitřními úhly při vrcholech C, D a E, v němž $|BC| = |DE|$ a $|CD| = |EA|$. Dokažte, že tento pětiúhelník je *tětivový*.

Řešení. Ze zadání plyne, že trojúhelníky ADE, CED a DBC jsou shodné (podle věty *sus*). Trojúhelníky ADE, CED mají shodné výšky z vrcholů A a C ke straně DE (obr. 1). Odtud plyne $AC \parallel DE$, a tedy $ACDE$ je rovnoramenný lichoběžník se základnami AC a DE. Podobně ukážeme, že také $EBCD$ je rovnoramenný lichoběžník se základnami EB a CD. Oba uvedené lichoběžníky jsou přitom tětivové. Vzhledem k tomu, že vrcholy C, D, E daného pětiúhelníku leží na *téže* kružnici (opsané trojúhelníku CDE), jsou obě kružnice opsané rovnoramenným lichoběžníkům $ACDE$ a $EBCD$ *identické*, a tudíž i vrcholy A, B leží na této kružnici.



Obr. 1

Závěr. Daný pětiúhelník $ABCDE$ je tedy tětivový, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 2

Je dán *tětivový* pětiúhelník $ABCDE$, v němž $|AB| = |BC|$. Označme K průsečík jeho úhlopříček AD a BE. Dále nechť L značí průsečík jeho úhlopříček BD a CE. Dokažte, že přímky KL a AC jsou rovnoběžné.

Řešení. Protože podle zadání platí $|AB| = |BC|$, jsou přímky BD, BE osami vnitřních úhlů po řadě při vrcholech D, E v trojúhelnících ACD, ACE.

Vzhledem k tomu, že $ABCDE$ je tětivový pětiúhelník, platí $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle AEC|$ (obr. 2), a tedy

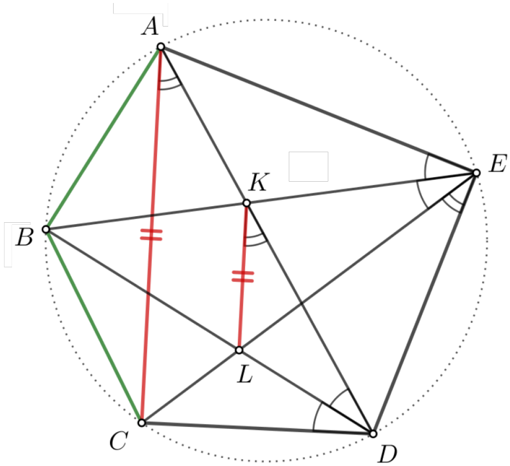
$$|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle BEC|.$$

Čtyřúhelník $KLDE$ je tedy tětivový, a platí tudíž

$$|\sphericalangle LKD| = |\sphericalangle LED| = |\sphericalangle CED| = |\sphericalangle CAD|.$$

Úhly LKD a CAD jsou tedy souhlasné, a proto jsou přímky KL a AC rovnoběžné.

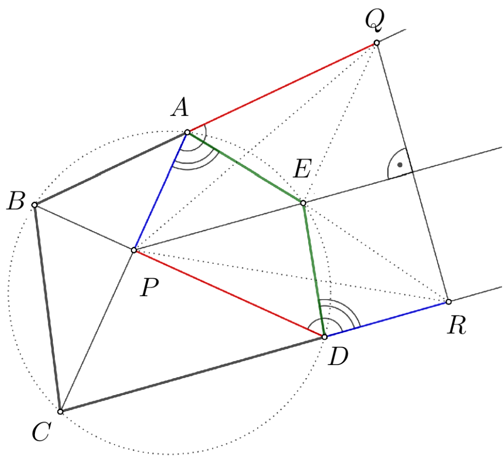
Tím je důkaz uzavřen.



Obr. 2

Příklad 3 (Kanadská MO, 2018)

Je dán tětivový pětiúhelník $ABCDE$, v němž $|DE| = |AE|$. Nechť P značí průsečík jeho úhlopříček AC a BD. Dále nechť Q je bod na polopřímce opačné k AB, kde $|AQ| = |PD|$, a R je bod na polopřímce opačné k DC, kde $|DR| = |PA|$. Dokažte, že přímky PE a QR jsou navzájem kolmé.



Obr. 3

Řešení. Ze zadání je patrné, že $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BDC|$. Navíc platí

$$|\sphericalangle QAP| = |\sphericalangle QAC| = |\sphericalangle RDB| = |\sphericalangle RDP|.$$

Trojúhelníky APQ a DRP jsou tedy shodné (sus), proto $|PR| = |PQ|$. Bod P tak leží na ose úsečky RQ.

Z tětivového čtyřúhelníku $ACDE$ plyne

$$|\sphericalangle CAE| = |\sphericalangle PAE| = |\sphericalangle RDE|,$$

tudíž trojúhelníky PAE a RDE jsou shodné (sus), a tedy $|PE| = |RE|$.

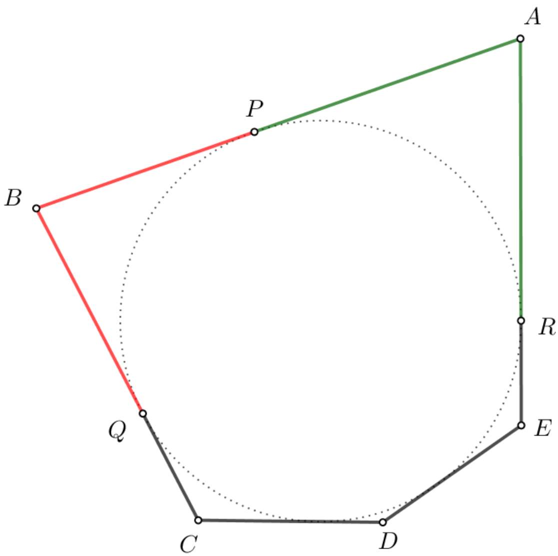
Analogicky ukážeme, že i trojúhelníky PDE a QAE jsou shodné, proto také $|PE| = |QE|$. Bod E je tak středem kružnice opsané trojúhelníku PRQ, a leží proto rovněž (kromě bodu $P \neq E$) na ose úsečky RQ.

Tím jsme dokázali, že $PE \perp RQ$.

Tečnové pětiúhelníky

Příklad 4

V každém *tečnovém* pětiúhelníku existují tři jeho strany, z nichž lze sestrojit trojúhelník. Dokažte.



Obr. 4

Řešení. Nechť bez újmy na obecnosti je AB nejdelší stranou tečnového pětiúhelníku $ABCDE$. Dotykové body kružnice jemu vepsané se stranami AB, BC, AE označme po řadě P, Q, R. Ze shodnosti úseků AP a AR, resp. BP a BQ, viz obr. 4, plyne

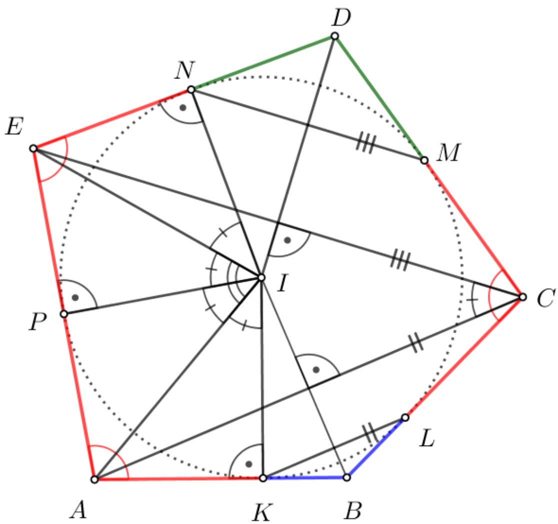
$$|AB| = |AP| + |BP| = |AR| + |BQ| < |AE| + |BC|.$$

Tato nerovnost je vzhledem k podmínkám $|AB| \geq |BC|$ a $|AB| \geq |AE|$ nutnou a postačují podmínkou pro existenci trojúhelníku o stranách délek $|AB|$, $|AE|$ a $|BC|$, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 5 (44. Turnaj měst, 2022/2023, podzimní část)

Je dán *tečnový* pětiúhelník $ABCDE$, jehož vnitřní úhly při vrcholech A, C, E mají velikost $100°$. Určete velikost úhlu ACE.

Řešení. Označme K, L, M, N, P dotykové body kružnice vepsané danému pětiúhelníku $ABCDE$ po řadě s jeho stranami AB, BC, CD, DE, EA (obr. 5).



Obr. 5

Ze shodnosti vnitřních úhlů při vrcholech A, C a E plynou pro úseky, které vytínají tyto vrcholy daného pětiúhelníku a dotykové body kružnice jemu vepsané, následující rovnosti

$$|AK| = |AP| = |EP| = |EN| = |CL| = |CM|.$$

Dále též platí $|BK| = |BL|$ a $|DM| = |DN|$. Odtud plyne, že oba trojúhelníky ABC a CDE jsou rovnoramenné se základnami po řadě AC a CE a příčky KL a MN v těchto trojúhelnících jsou navíc rovnoběžné se základnami AC a CE rovnoramenných trojúhelníků ABC a CDE. Přímky, na nichž leží výšky z hlavních vrcholů v obou těchto trojúhelnících, jsou tedy osami vnitřních úhlů při vrcholech B a D, a protínají se tak v bodě I, který je středem kružnice vepsané danému pětiúhelníku $ABCDE$. Současně však jsou tyto přímky osami stran AC a CE v trojúhelníku ACE, takže jejich průsečík I je současně středem kružnice opsané tomuto trojúhelníku, přičemž osa strany AE také prochází tímto bodem.

Přímky AI a EI jsou navíc osami shodných vnitřních úhlů při vrcholech A a E v daném pětiúhelníku, neboť čtyři pravoúhlé trojúhelníky AKI, API, PEI a NEI jsou podle věty *sus* navzájem shodné. Protože $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle AED| = 100°$, mají oba (shodné) pravoúhlé trojúhelníky API a EPI shodné také vnitřní úhly při vrcholu I velikosti $90° - \frac{1}{2} \cdot 100° = 90° - 50° = 40°$.

Velikost středového úhlu AIE v trojúhelníku ACE je tedy $2 \cdot 40° = 80°$. Odpovídající obvodový úhel ACE má proto poloviční velikost, platí tedy $|\sphericalangle ACE| = 40°$.

Jiné řešení (*podle Lenky Poljakové z G Jakuba Škody v Přerově*). Protože součet velikostí vnitřních úhlů v daném konvexním pětiúhelníku je roven $540°$, viz např. [3], důsledek věty 1, platí

$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDE| = 540° - 3 \cdot 100° = 240°.$$

Označme β velikost vnitřního úhlu při vrcholu B v daném pětiúhelníku $ABCDE$, tj. $|\sphericalangle ABC| = \beta$. Pak $|\sphericalangle CDE| = 240° - \beta < 180°$, odkud $180° > \beta > 60°$. Z obr. 5 dále vidíme, že v rovnoramenných trojúhelnících ABC a CDE platí

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BCA| = 90° - \frac{\beta}{2} \tag{1}$$

a

$$|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle DCE| = \frac{\beta}{2} - 30°. \tag{2}$$

Pro velikost vnitřního úhlu při vrcholu C v tomto pětiúhelníku tedy platí

$$100° = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle ACE| + |\sphericalangle DCE|.$$

Užitím vztahů (1) a (2) odtud přímo obdržíme

$$|\sphericalangle ACE| = 100^\circ - |\sphericalangle BCA| - |\sphericalangle DCE| =$$
$$= 100^\circ - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) - \left(\frac{\beta}{2} - 30^\circ\right) = 40^\circ.$$

. . . a ještě tři úlohy navíc

Příklad 6 (Kazašská MO, 2014/2015)

Je dán *tětivový* pětiúhelník $ABCDE$, v němž $|\sphericalangle CAD| = 50^\circ$. Určete součet velikostí jeho vnitřních úhlů při vrcholech B a E.

[Hledaný součet velikostí obou úhlů je 230°. *Návod*: Využijte vztahy pro součty velikostí protilehlých úhlů v tětivových čtyřúhelnících $ABCD$ a $ACDE$.]

Příklad 7 (viz [1])

Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Označme P libovolný bod kratšího oblouku AB kružnice opsané danému pětiúhelníku. Dokažte, že platí

$$|AP| + |BP| + |DP| = |CP| + |EP|.$$

[Využijte Ptolemaiovu větu pro tětivové čtyřúhelníky $APBC$, $APBD$ a $APBE$.]

Příklad 8 (18. ročník MO (1968/69), C–II–1)

Dokažte, že v každém *tečnovém* pětiúhelníku s celočíselnými délkami stran a obvodem, kterým je sudé číslo, mají také délky všech úseček na jeho stranách, jejímiž krajními body jsou vrcholy a dotykové body kružnice jemu vepsané, rovněž celočíselné velikosti.

Literatura

[1] *Càssola, C.*: Geometria piana per le gare di matematica. Scienza Express edizioni, U Math, Trieste, 2018.

[2] *Geretschläger, R., Kalinowski, J., Švrček, J.*: A Central European Olympiad (The Mathematical Duel). World Scientific Publishing, Singapore, 2018.

[3] *Chodorová, M., Švrček, J.*: O konvexních pětiúhelnících. MFI, roč. 33 (2024), č. 1, s. 17–24.

[4] *Juklová, L., Švrček, J.*: Pět pěkných příkladů pro pravidelný pětiúhelník. MFI, roč. 31 (2022), č. 1, s. 15–20.