Obsahy rovinných útvarů

MARTINA ŠKORPILOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Náplní článku jsou konkrétní příklady na výpočty obsahů rovinných obrazců složených z několika jednodušších geometrických útvarů. Ve výuce můžeme tyto úlohy použít například jako doplňující aktivity pro rychleji počítající žáky či jako příklady pro zpestření hodin různých matematických seminářů.

Problematika obsahů (a také obvodů) základních rovinných geometrických útvarů je zpracována například ve středoškolské učebnici [1].

Obrazce znázorněné na níže uvedených obr. 1 a 2 jsou dostupné rovněž mezi soubory umístěnými na webové stránce [2], a to v takové podobě, aby je mohli učitelé bez jakýchkoliv úprav použít (v tištěné či elektronické verzi) ve svých hodinách.

Obsah obrazce je v každém z příkladů značen S. Jednotlivé útvary, z nichž se obrazec skládá, jsou na obrázcích označeny přirozenými čísly. Obsah i-tého útvaru je označen S_i. Dolní index i je použit i u všech dalších značení příslušejících i-tému útvaru.

Obrázky jsou zakresleny ve čtvercových sítích, délka strany jednoho čtverečku je zřejmá z ilustrací.

V příkladech nejsou uvedeny jednotky; při výuce je však samozřejmě možné stanovit, s jakými jednotkami mají žáci počítat. Středy všech zkonstruovaných kružnic či kružnicových oblouků jsou v obrázcích vyznačeny křížky.

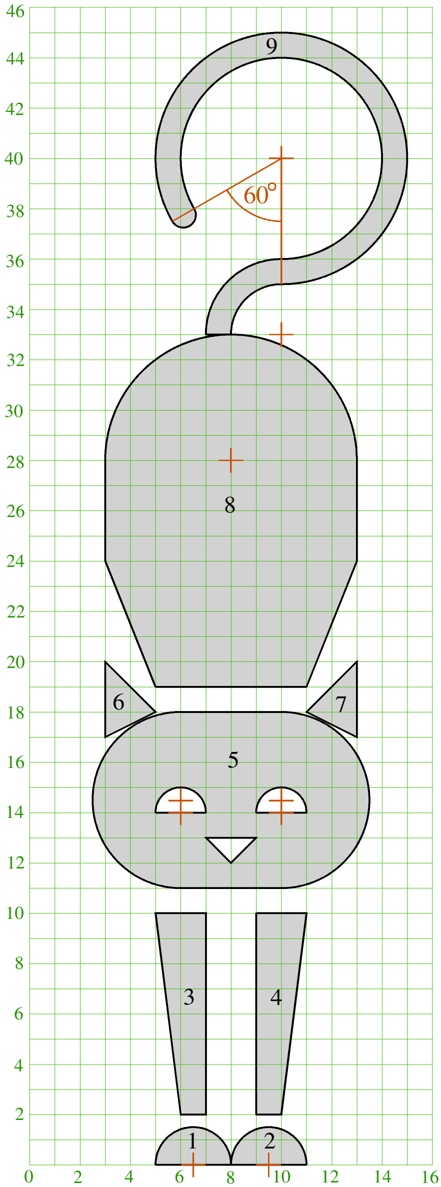
Příklad 1

Určete obsah obrazce znázorněného na obr. 1.

Řešení. Obrázek kočky se skládá z devíti útvarů.

Protože útvarem číslo 1 (a rovněž útvarem číslo 2) je půlkruh o poloměru $r_1 = 1{,}5$, je

$$S_1 = S_2 = \frac{\pi r_1^2}{2} = \frac{1{,}5^2\pi}{2} = 1{,}125\pi.$$



46
44
42
40
38
36
34
32
30
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
9
60°
8
6
7
5
3
4
1
2

Obr. 1

Útvarem číslo 3 (a rovněž útvarem číslo 4) je lichoběžník o základnách $a_3 = 1$, $b_3 = 2$ a výšce $v_3 = 8$. Tudíž

$$S_3 = S_4 = \frac{(a_3 + b_3)\,v_3}{2} = \frac{(1+2)\cdot 8}{2} = 12.$$

Na útvar číslo 5 lze nahlížet jako na rozdíl dvou množin bodů v rovině (dvou rovinných obrazců). Větší z nich lze složit ze dvou shodných půlkruhů o poloměru $r_5 = 3{,}5$ a obdélníku o stranách délek $a_5 = 4$ a $b_5 = 7$. Menší z nich je sjednocením dvou shodných půlkruhů o poloměru $p_5 = 1$ a trojúhelníku, jehož jedna strana má délku $c_5 = 2$ a výška k této straně je $v_5 = 1$. Proto

$$\begin{aligned} S_5 &= \pi r_5^2 + a_5 b_5 - \left(\pi p_5^2 + \frac{c_5 v_5}{2}\right) = \\ &= \left(3{,}5^2 - 1^2\right)\pi + 4\cdot 7 - \frac{2\cdot 1}{2} = 27 + 11{,}25\pi. \end{aligned}$$

Jelikož útvarem číslo 6 (a rovněž útvarem číslo 7) je trojúhelník, jehož jedna strana má délku $a_6 = 3$ a příslušná výška je $v_6 = 2$, platí

$$S_6 = S_7 = \frac{a_6 v_6}{2} = \frac{3\cdot 2}{2} = 3.$$

Útvar číslo 8 lze složit z lichoběžníku o základnách $a_8 = 6$, $b_8 = 10$ a výšce $v_8 = 5$, dále z obdélníku o stranách délek $b_8 = 10$ a $c_8 = 4$ a z půlkruhu o poloměru $r_8 = 5$. Z toho plyne, že

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{(a_8 + b_8)\,v_8}{2} + b_8 c_8 + \frac{\pi r_8^2}{2} = \\ &= \frac{(6+10)\cdot 5}{2} + 10\cdot 4 + \frac{5^2\pi}{2} = 80 + 12{,}5\pi. \end{aligned}$$

Útvar číslo 9 lze složit z částí *dvou* mezikruží a z půlkruhu. Hraniční kružnicové oblouky části prvního mezikruží mají poloměry $R_9 = 3$, $r_9 = 2$ a příslušný středový úhel má velikost $90°$. Hraniční kružnicové oblouky části druhého mezikruží mají poloměry $P_9 = 5$, $p_9 = 4$ a příslušný středový úhel má velikost $300°$. Půlkruh má poloměr $q_9 = 0{,}5$. Proto

$$\begin{aligned} S_9 &= \frac{90}{360}\cdot\left(\pi R_9^2 - \pi r_9^2\right) + \frac{300}{360}\cdot\left(\pi P_9^2 - \pi p_9^2\right) + \frac{\pi q_9^2}{2} = \\ &= \frac{\pi}{4}\left(3^2 - 2^2\right) + \frac{5\pi}{6}\left(5^2 - 4^2\right) + \frac{0{,}5^2\pi}{2} = \frac{71\pi}{8} = 8{,}875\pi. \end{aligned}$$

Obsah S vybarvené plochy na obr. 1 je tudíž

$$S=\sum_{i=1}^{9} S_i = 1{,}125\pi + 1{,}125\pi + 12 + 12 + 27 + 11{,}25\pi + \\ + 3 + 3 + 80 + 12{,}5\pi + 8{,}875\pi = 137 + 34{,}875\pi \doteq 246{,}6.$$

Příklad 2

Určete obsah obrazce znázorněného na obr. 2.

Řešení. Obrázek motorky se skládá z deseti útvarů.

Útvarem číslo 1 je část mezikruží ohraničeného kružnicovými oblouky o poloměrech $R_1 = 30$ a $r_1 = 25$. Jelikož oblouky přísluší úhlu o velikosti $72°$, je

$$S_1 = \frac{72}{360}\cdot\left(\pi R_1^2 - \pi r_1^2\right) = \frac{\pi}{5}\cdot\left(30^2 - 25^2\right) = 55\pi.$$

Útvarem číslo 2 je mezikruží, které je ohraničené kružnicemi o poloměrech $R_2 = 20$ a $r_2 = 15$. Proto

$$S_2 = \pi R_2^2 - \pi r_2^2 = \pi\left(20^2 - 15^2\right) = 175\pi.$$

Útvarem číslo 3 je obdélník, jehož strany mají délky $a_3 = 25$ a $b_3 = 5$. Tedy

$$S_3 = a_3 b_3 = 25\cdot 5 = 125.$$

Útvarem číslo 4 je pětiúhelník, který můžeme rozdělit horizontální úsečkou vedenou jeho levým dolním vrcholem (v příslušné čtvercové síti jím prochází vertikální čára označená 60) na trojúhelník a lichoběžník. Jedna ze stran trojúhelníku má délku $a_4 = 45$ a příslušnou výšku $v_4 = 5$, lichoběžník má základny $a_4 = 45$, $b_4 = 75$ a výšku $w_4 = 30$. Z toho vyplývá, že

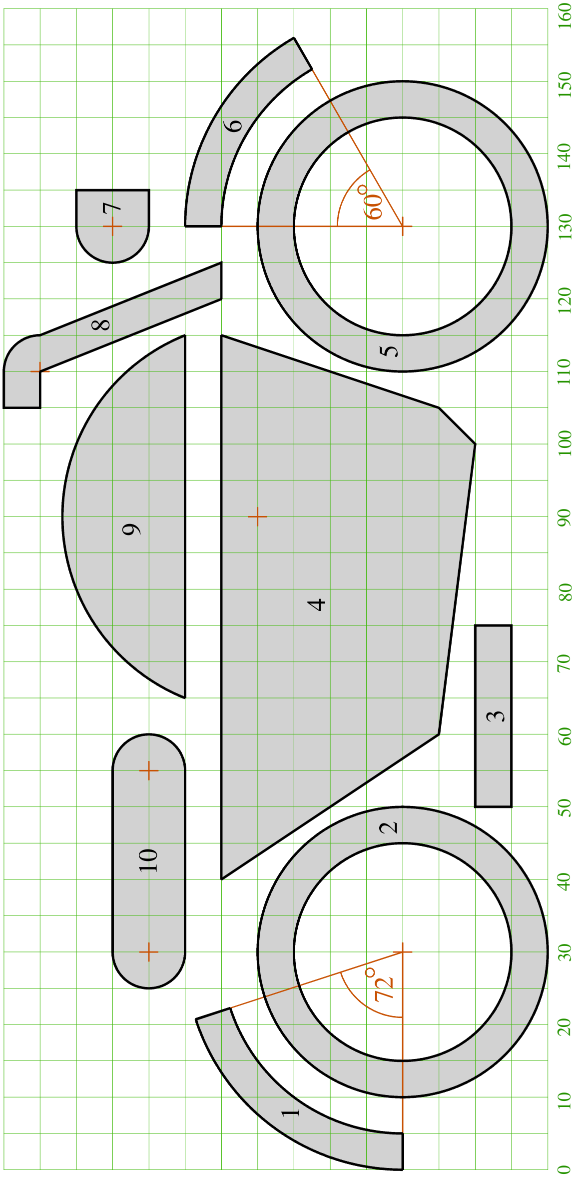
$$S_4 = \frac{a_4 v_4}{2} + \frac{(a_4 + b_4)\,w_4}{2} = \frac{45\cdot 5}{2} + \frac{(45+75)\cdot 30}{2} = \frac{3825}{2}.$$

Jelikož útvar číslo 5 je shodný s útvarem číslo 2, je

$$S_5 = S_2 = 175\pi.$$

Útvarem číslo 6 je část mezikruží. Protože jeho hranici tvoří kružnicové oblouky o poloměrech $R_6 = 30$, $r_6 = 25$ a dále úsečky, které leží na ramenech úhlu o velikosti $60°$, platí

$$S_6 = \frac{60}{360}\cdot\left(\pi R_6^2 - \pi r_6^2\right) = \frac{\pi}{6}\cdot\left(30^2 - 25^2\right) = \frac{275\pi}{6}.$$


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
60°
72°
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160

Obr. 2

Útvar číslo 7 je složen z obdélníku, jehož strany mají délky $a_7 = 5$, $b_7 = 10$, a z půlkuhu o poloměru $r_7 = 5$. Tudíž

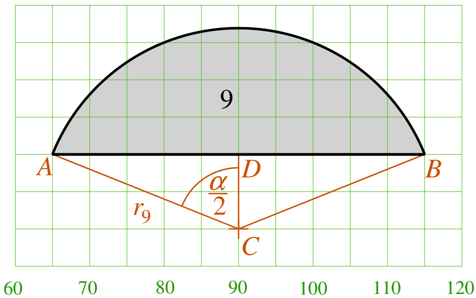
$$S_7 = a_7 b_7 + \frac{\pi r_7^2}{2} = 5 \cdot 10 + \frac{5^2\pi}{2} = 50 + \frac{25\pi}{2}.$$

Útvar číslo 8 se skládá ze čtverce, jehož strana má délku $a_8 = 5$, ze čtvrtkruhu o poloměru $r_8 = 5$ a rovnoběžníku o straně $b_8 = 5$ a příslušné výšce $v_8 = 25$. Odtud plyne

$$S_8 = a_8^2 + \frac{\pi r_8^2}{4} + b_8 v_8 = 5^2 + \frac{5^2\pi}{4} + 5 \cdot 25 = 150 + \frac{25\pi}{4}.$$

Útvar číslo 9 je kruhová úseč, u níž neznáme ani poloměr r_9, ani velikost příslušného středového úhlu α. Oba údaje určíme pomocí pravoúhlého trojúhelníku ACD vyznačeného na obr. 3. Poloměr r_9 vypočítáme pomocí Pythagorovy věty jakožto délku přepony trojúhelníku:

$$\begin{aligned} r_9^2 &= 10^2 + 25^2, \\ r_9 &= \sqrt{725}. \end{aligned}$$



Obr. 3

K vyjádření velikosti úhlu α využijeme funkci tangens:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \frac{25}{10}, \\ \alpha &= 2 \operatorname{arctg} \frac{25}{10}. \end{aligned}$$

Proto

$$\alpha \doteq 136{,}4^\circ.$$

Obsah kruhové úseče je roven rozdílu obsahu kruhové výseče o poloměru $r_9 = \sqrt{725}$ a příslušném středovém úhlu o velikosti $\alpha \doteq 136{,}4°$ a obsahu trojúhelníku ACB, jehož jedna ze stran má délku $a_9 = |AB| = 50$ a výšku k této straně $v_9 = 10$. Tedy

$$S_9 = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r_9^2 - \frac{a_9 v_9}{2} \doteq \frac{136{,}4}{360} \cdot 725\pi - \frac{50 \cdot 10}{2} = \frac{9889\pi}{36} - 250.$$

Útvar číslo 10 lze složit ze dvou shodných půlkruhů o poloměru $r_{10} = 5$ a z obdélníku, jehož strany mají délky $a_{10} = 25$, $b_{10} = 10$. Tudíž

$$S_{10} = 2 \cdot \frac{\pi r_{10}^2}{2} + a_{10} b_{10} = 5^2\pi + 25 \cdot 10 = 25\pi + 250.$$

Obsah obrazce znázorňujícího motorku je proto

$$\begin{aligned} S = \sum_{i=1}^{10} S_i \doteq \\ &\doteq 55\pi + 175\pi + 125 + \frac{3825}{2} + 175\pi + \frac{275\pi}{6} + 50 + \\ &+ \frac{25\pi}{2} + 150 + \frac{25\pi}{4} + \frac{9889\pi}{36} - 250 + 25\pi + 250 = \\ &= 430\pi + \frac{12214\pi}{36} + \frac{4475}{2} \doteq \\ &\doteq 769{,}3\pi + 2237{,}5 \doteq 4654{,}3. \end{aligned}$$

Příklady lze samozřejmě modifikovat tak, že žákům zadáme za úkol určit obvody jednotlivých útvarů, z nichž jsou obrazce složeny.

Literatura

[1] *Pomykalová, E.*: Planimetrie. 5. vydání, Prometheus, Praha, 2021.

[2] `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~stepanov/vyuka.html`