Ortocentrum trojúhelníku

PAVEL LEISCHNER

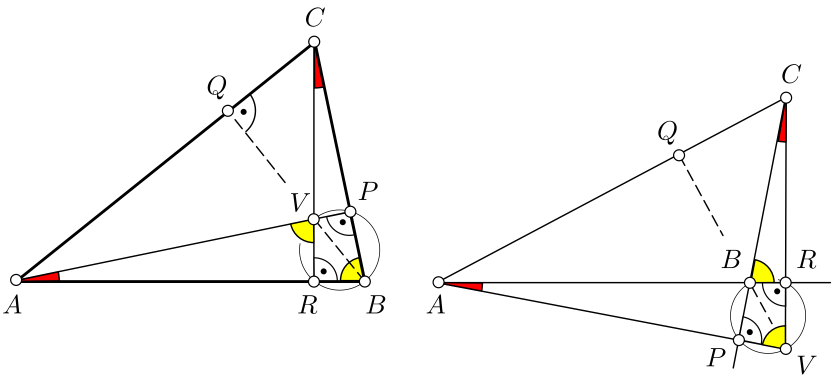
Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Poznatek, že se kolmice z vrcholů trojúhelníku k protilehlým stranám, tj. přímky, na nichž leží výšky, protínají v jednom bodě zvaném *průsečík výšek* neboli *ortocentrum*, patří do učiva základní školy. Seznámíme se zde s jeho historií a některými důsledky.

Větu o ortocentru znal již Archimédés, užil ji například při důkazu tvrzení 5 z Knihy lemmat [1, s. 305–306]. Pravděpodobně ji i dokázal v některé z jeho ztracených prací. Dále větu zmiňují Pappus, Proklos, Regiomontanus a další. Avšak až do 17. století bez důkazu, nebo s nekorektním zdůvodněním.

Nejstarší známý důkaz [4, s. 454] byl nalezen v nepublikovaném Newtonově manuskriptu z roku 1680. Stojí za to se s ním (v upravené formě) seznámit:

Nechť je dán trojúhelník ABC s průsečíkem V výšek AP a CR. Předpokládejme nejprve, že je ostroúhlý, obr. 1 vlevo. Čtyřúhelník $PVRB$ je v důsledku Thaletovy věty tětivový. Jeho vnější úhel AVR je tedy shodný s protilehlým vnitřním úhlem CBR.



Obr. 1 K Newtonově důkazu s rozlišením dvou možných situací

Analogicky lze ověřit, že je rovnost $|\sphericalangle AVR| = |\sphericalangle CBR|$ splněna, i když je úhel ABC tupý (obr. 1 vpravo). Pravoúhlé trojúhelníky AVR a CBR

jsou v obou situacích podobné a platí

$$|\sphericalangle VAR| = |\sphericalangle BCR| \quad \text{a} \quad \frac{|RV|}{|RB|} = \frac{|RA|}{|RC|}. \tag{1}$$

Odtud

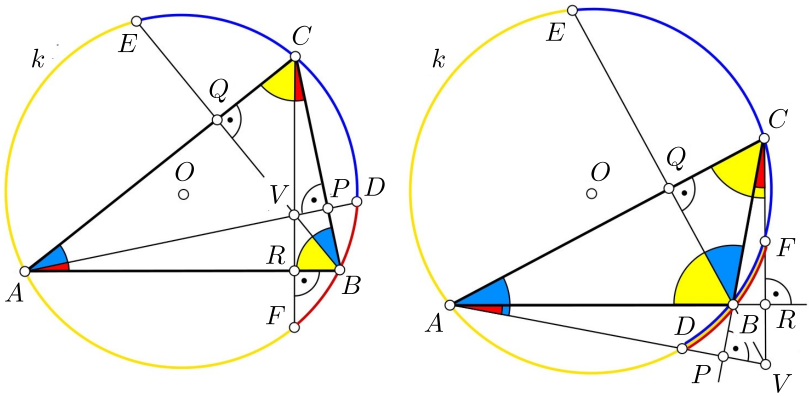
$$|RV| = \frac{|RA| \cdot |RB|}{|RC|}. \tag{2}$$

Analogickým postupem pro výšky BQ a CR s průsečíkem V' nalezneme pro délku úsečky RV' stejný výraz. Je tedy $V' = V$.

Z Newtonova postupu plynou další poznatky. Jestliže průsečík přímky VR s kružnicí k opsanou trojúhelníku ABC označíme F ($F \neq C$, obr. 2), pak pomocí mocnosti bodu R ke kružnici k a vztahu (2) dostáváme

$$|RF| = \frac{|RA| \cdot |RB|}{|RC|} = |RV|$$

a odtud užitečnou větu 1.



Obr. 2 Vrcholy A, B a C leží ve středech oblouků EF, FD a DE

Věta 1

Obrazy ortocentra v osových souměrnostech podle stran trojúhelníku leží na kružnici trojúhelníku opsané.

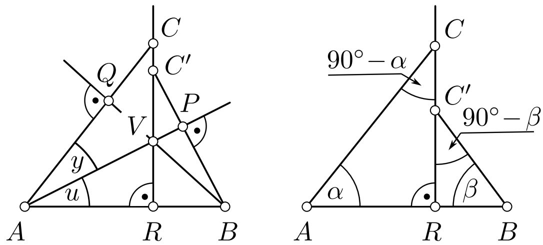
Důsledek 1

Kružnice opsané trojúhelníkům ABC, ABV, BCV a ACV jsou shodné. (Zřejmé z osových souměrností podle stran trojúhelníku ABC.)

Důsledek 2

Při označení podle obr. 2 leží vrcholy A, B a C po řadě ve středech oblouků EF, FD a DE kružnice k, neboť shodným obvodovým úhlům přísluší shodné oblouky.

Vraťme se ještě k důkazům věty o ortocentru. Anglická Wikipedie i jiné zdroje uvádí, že první důkaz věty o ortocentru podal roku 1749 britský geodet W. Chapple (69 let po Newtonovi). Dalo by se to považovat za nejstarší známý publikovaný důkaz, kdyby to důkaz byl. Podívejme se na jeho postup ze stránek `https://www.cut-the-knot.org/triangle/Chapple.shtml`.



Obr. 3 K Chappleovu „důkazu“, 180° je součet úhlů vyznačených napravo

Chapple vycházel z trojúhelníku ABV na obr. 3 vlevo, značení upraveno. Paty kolmic z vrcholů B, A na přímky AV, BV označil P, Q a průsečíky kolmice RV na stranu AB s přímkami BP a AQ označil C' a C. Zbývalo dokázat, že $C' = C$.

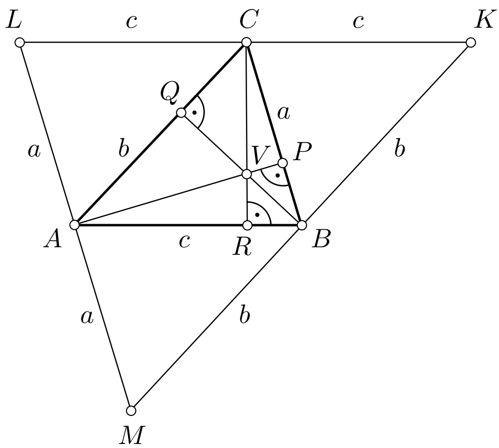
Naznačil určování velikostí dalších úhlů na obrázku pomocí veličin u a y. A pak prohlásil, že nakonec pro součet velikostí úhlů při vrcholech A, B, C' a C vyjde 180° (což je zřejmé i bez výpočtů, viz obr. 3 vpravo) a podle věty I.37 z Eukleidových Základů[1)] platí $C' = C$.

Věta o ortocentru se při výuce obvykle dokazuje podle Gausse, a to buď s využitím stejnolehlosti ([3, s. 169–170]) nebo doplňováním trojúhelníku ABC na rovnoběžníky $ABKC$, $BCLA$, $CAMB$, obr. 4. Výšky z vrcholů A, B a C jsou pak totožné s osami stran trojúhelníku KLM, o nichž již žáci vědí, že se protínají ve středu kružnice opsané trojúhelníku KLM.

Do třetice uveďme ještě jeden důkaz existence ortocentra. Využívá větu o obvodových úhlech.

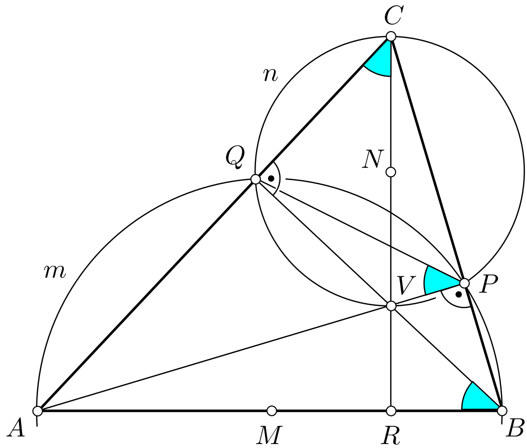
---

1)Věta I.37 tvrdí, že trojúhelníky se společnou základnou a třetím vrcholem na rovnoběžce s ní mají stejné obsahy. S Chappleovým závěrem nesouvisí.



Obr. 4 Gaussův důkaz existence ortocentra

V trojúhelníku ABC označme V průsečík výšek AP a BQ, a R průsečík přímek AB, CV (obr. 5). Stačí dokázat, že je úhel ARC pravý.



Obr. 5 Důkaz věty o ortocentru metodou pomocných kružnic

Jsou-li m a n Thaletovy kružnice s průměry AB a CV, pak

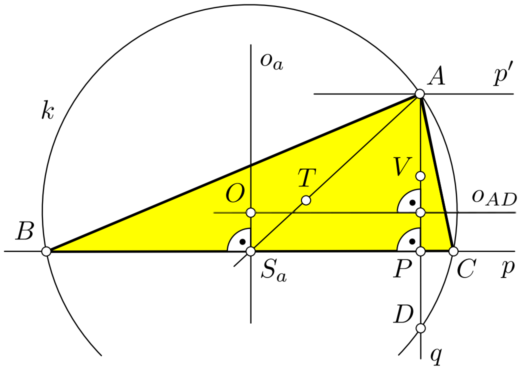
$$|\sphericalangle ABQ| = |\sphericalangle APQ| = |\sphericalangle VPQ| = |\sphericalangle VCQ| = |\sphericalangle RCA|.$$

Trojúhelníky CAR a BAQ jsou podobné, neboť se shodují v úhlech při vrcholech B, C a společném úhlu BAC. Odtud

$$|\sphericalangle ARC| = |\sphericalangle AQB| = 90^\circ.$$

Příklad 1

Jsou dány body T a V uvnitř poloroviny s hraniční přímkou p. Sestrojte trojúhelník, jehož dva vrcholy leží na přímce p, bod T je jeho těžištěm a bod V ortocentrem.



Obr. 6 Obrázek k příkladu 1

Řešení. Trojúhelník označme ABC tak, aby $B, C \in p$, obr. 6. Je-li AS_a těžnice trojúhelníku, pak

$$|TA| = 2|TS_a|.$$

Víme, že $S_a \in p$. Bod A tedy leží na obrazu p' přímky p ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem -2. Zároveň leží i na kolmici q z bodu V k přímce p.

Bod D souměrně sdružený s ortocentrem podle přímky p leží na kružnici k trojúhelníku opsané (věta 1). Její střed O je průsečíkem osy o_{AD} úsečky AD a osy o_a strany BC. Osa o_a je dána přímkou p a průsečíkem S_a přímek AT a p.

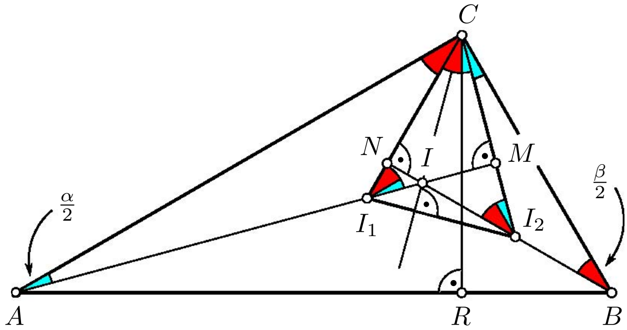
Konstrukce. Postupně sestrojíme přímky p', q, jejich průnik A, průsečík S_a přímky p s přímkou AT a obraz D bodu V v symetrii podle p. Dále osu o_{AD} a přímku o_a (kolmici na přímku p v bodě S_a). Střed O kružnice k je průnikem přímek o_a a o_{AD}, $\{B, C\} = p \cap k(O; |OA|)$.

Úpravu konstrukce pro situaci $p \perp TV$ nebo $T = V$, ověření její správnosti i zdůvodnění faktu, že má úloha vždy právě jedno řešení, ponecháváme čtenáři.

Příklad 2

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Označme R patu jeho výšky z vrcholu C a I_1, I_2 středy kružnic vepsaných trojúhelníkům ARC a BRC. Dokažte, že je přímka I_1I_2 kolmá k ose úhlu ACB.

Řešení. Je zřejmé z obr. 7, kde I je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, $M \in AI \cap CI_2$ a $N \in BI \cap CI_1$.



Obr. 7 Řešení příkladu 2

Trojúhelníky ABC, ACR a CBR jsou navzájem podobné. Odtud a z vlastností os úhlů dostáváme

$$|\sphericalangle I_2CB| = |\sphericalangle RCI_2| = |\sphericalangle CAI| = \frac{\alpha}{2}$$

a

$$|\sphericalangle I_1CR| = |\sphericalangle ACI_1| = |\sphericalangle CBI| = \frac{\beta}{2}.$$

Platí též

$$45^\circ = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = |\sphericalangle CI_1M| = |\sphericalangle CI_2N|$$

(vnější úhly trojúhelníků CAI_1 a CBI_2). Navíc je

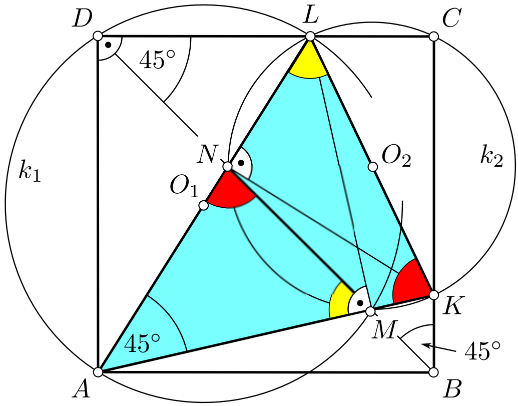
$$|\sphericalangle I_1CM| = |\sphericalangle I_2CN| = 45^\circ,$$

a tak jsou trojúhelníky CI_1M a CI_2N rovnoramenné a pravoúhlé. Průsečík I jejich odvěsen I_1M a I_2N je ortocentrem trojúhelníku CI_1I_2. Je tedy $CI \perp I_1I_2$.

Metoda, kterou jsme použili v posledním důkazu věty o ortocentru, se nazývá *metoda pomocných kružnic*. Využijeme ji nyní při řešení příkladu 3.

Příklad 3

Na straně BC čtverce $ABCD$ je zvolen bod K a na straně CD bod L tak, že platí $|\sphericalangle KAL| = 45°$. Úhlopříčka BD protíná úsečku AK v bodě M a úsečku AL v bodě N. Určete poměr obsahů trojúhelníků AKL a AMN.



Obr. 8 Obrázek k příkladu 3

Řešení. Opišme trojúhelníku AML kružnici k_1. Úhlopříčky čtverce půlí jeho úhly, a tak

$$|\sphericalangle MDL| = 45° = |\sphericalangle MAL|.$$

To znamená, že $D \in k_1$ a a pro tětivový čtyřúhelník $AMLD$ platí

$$|\sphericalangle AML| = 180° - |\sphericalangle ADL| = 90°.$$

Analogicky pro kružnici opsanou trojúhelníku ANK zjistíme, že je pravý i úhel ANK. Úsečky LM a KN jsou tedy výšky trojúhelníku AKL a v tětivovém čtyřúhelníku $KLNM$ jsou vnější úhly shodné s protilehlými vnitřními. Odtud $|\sphericalangle ANM| = |\sphericalangle AKL|$ a $|\sphericalangle AMN| = |\sphericalangle ALK|$.

Trojúhelníky AMN a ALK jsou podobné, poměr jejich podobnosti je

$$\kappa = \frac{|AL|}{|AM|} = \frac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2} \quad \text{(pravoúhlý trojúhelník } ALM\text{)}.$$

Poměr obsahů určuje hodnota κ^2, $S_{AKL} : S_{AMN} = 2 : 1$.

Na závěr uvádíme několik úloh na procvičení výše uvedených poznatků.

Úlohy

1. S využitím věty o ortocentru trojúhelníku sestrojte přímku p, jež prochází bodem M a nepřístupným průsečíkem přímek a, b.
2. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, jsou-li dány obrazy D, E a F jeho ortocentra v osových souměrnostech podle stran trojúhelníku. Kolik má úloha řešení?
3. Je dán bod V uvnitř kruhu ohraničeného kružnicí k a bod $A \in k$. Sestrojte body $B, C \in k$ tak, aby byl bod V ortocentrem trojúhelníku ABC.
4. Sestrojte trojúhelník ABC s ortocentrem V a patou R jeho výšky z vrcholu C, je-li dána úsečka CV o délce 6 cm s vnitřním bodem R, přičemž $|RV| = 1,5$ cm, a poloměr kružnice trojúhelníku opsané je $r = 3,5$ cm.
5. V rovině je dána přímka p a mimo ni body P, Q. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby vrcholy A a B ležely na přímce p a body P, Q byly po řadě paty jeho výšek z vrcholů A, B.
6. Upravte Chappleův postup tak, aby byl korektní. (Dokažte například, že se body C a C' nachází v témže průsečíku přímky RV s kružnicí opsanou trojúhelníku PQV.)
7. Dokažte, že pro trojúhelník ABC, který má $\gamma \neq 90°$ platí: Jsou-li AP a BQ jeho výšky, pak jsou trojúhelníky PQC a ABC podobné s poměrem podobnosti $\frac{|PC|}{|AC|} = |\cos\gamma|$. (Rozlište tři situace ostroúhlý, pravoúhlý a tupoúhlý trojúhelník ABC.)
8. Na půlkružnici s průměrem AB jsou dány body C a D, různé od A a B. Bod E zvolíme tak, aby $ACED$ byl rovnoběžník. Dokažte, že $DC \perp BE$.

Literatura

[1] *Heath, T. L.*: The Works of Archimedes. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[2] *Ostermann, A., Vanner, G.*: Geometry by its history. Springer Verlag, Berlin, 2012.

[3] *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia – Planimetrie. Prometheus, Praha, 1994.

[4] *Whiteside, T. D.*: The Mathematical Pappers of Isaac Newton: Volume 4. Cambridge University Press, Cambridge, 1971.