Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 9. 2024 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu *mfi@upol.cz.* Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 293

a) Kuchař rozřezal kilogramový bochník sýra na šest dílů vážících alespoň 50 g. Dokažte, že z nich může několik vybrat a rozdělit je na dva talíře tak, aby se hmotnosti sýra v obou talířích lišily méně než 15 g.

b) Na kolik dílů vážících aspoň 1 g musí kuchař tento bochník rozdělit, aby z nich bylo možno několik rozdělit na dva talíře tak, že hmotnosti sýra v obou talířích se liší méně než 1 g? Najděte nejmenší takový počet.

Pavel Calábek

Úloha 294

V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D a E průsečíky os stran AC a AB po řadě s přímkami AB a AC. Dále označme F a G body souměrně sdružené podle bodu A po řadě s vrcholy B a C. Dokažte, že body D, E, F a G leží na téže kružnici.

Patrik Bak

Dále uvádíme řešení úloh 289 a 290, jejichž zadání jsme zveřejnili v posledním (čtvrtém) čísle loňského (32.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 289

Určete všechny trojice (p, q, r) prvočísel, pro něž platí

$$p + 2q^2 + 3r^3 = 2023.$$

Jaroslav Švrček

Řešení. Číslo $2q^2$ je sudé, proto $p + 3r^3$ je číslo liché, jedno z prvočísel p, r je tedy liché, druhé sudé. Protože existuje jediné sudé prvočíslo 2, uvažujeme dvě možnosti.

a) $p = 2$. Potom $2q^2 + 3r^3 = 2021$. Protože $3 \cdot 9^3 = 2187 > 2021$, je $r < 9$, tedy r je jedno z lichých prvočísel 3, 5, 7. Pro tato prvočísla dostáváme $2q^2$ po řadě (včetně prvočíselných rozkladů) $1940 = 2^2 \cdot 5 \cdot 97$, $1646 = 2 \cdot 823$ a $992 = 2^5 \cdot 31$. Ani v jednom z případů tak q není pročíslo, tedy v tomto případě neexistuje řádné řešení.

b) $r = 2$. Potom $p + 2q^2 = 1999$. Protože $2 \cdot 32^2 = 2048 > 1999$, je $q < 32$, tedy q je jedno z prvočísel 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 a 31. Pro tato prvočísla dostáváme p po řadě $1991 = 11 \cdot 181$, $1981 = 7 \cdot 283$, 1949, 1901, $1757 = 7 \cdot 251$, $1661 = 11 \cdot 151$, $1421 = 7^2 \cdot 29$, 1277, 941, 317 a $77 = 7 \cdot 11$. Jelikož 1949, 1901, 1277, 941 a 317 jsou vesměs prvočísla, má úloha v tomto případě pět řešení

$$(p, q, r) \in \{(1949, 5, 2), (1901, 7, 2), (1277, 19, 2), (941, 23, 2), (317, 29, 2)\}.$$

Úloze vyhovuje právě pět trojic uvedených v části b) předchozího odstavce.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Tomáš Hauser* z Kolína, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Markéta Dytrychová*, G U Balvanu, Jablonec nad Nisou, *Lucian Poljak* a *Štěpán Pospíšil*, oba GJŠ Přerov a *Piotr Szatan*, II LO v Tarnovských Horách (Polsko).

Úloha 290

Lenka si vybrala tři navzájem různá reálná čísla a, b, c a spočítala hodnoty tří výrazů

$$\left|\frac{a+b}{(a-c)(b-c)}\right|, \quad \left|\frac{b+c}{(b-a)(c-a)}\right| \quad \text{a} \quad \left|\frac{c+a}{(c-b)(a-b)}\right|.$$

Dokažte, že jedna z těchto tří hodnot je rovna součtu zbylých dvou.

Josef Tkadlec

Řešení. Nejprve ukážeme, že pro vyhovující čísla a, b, c je součet tří výše uvedených výrazů bez absolutních hodnot roven 0. Postupnými úpravami dostáváme

$$\frac{a+b}{(a-c)(b-c)} + \frac{b+c}{(b-a)(c-a)} + \frac{c+a}{(c-b)(a-b)} =$$
$$= \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} + \frac{(b+c)(b-c)}{(b-a)(b-c)(c-a)} + \frac{(c+a)(c-a)}{(c-b)(a-b)(c-a)} =$$
$$= \frac{(a^2-b^2)+(b^2-c^2)+(c^2-a^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 0.$$

Pokud by se všechny tři výrazy rovnaly nule, platilo by

$$a + b = b + c = c + a = 0,$$

tedy

$$a = b = c = 0,$$

což je spor se zadáním, proto jsou alespoň dva různé od nuly. Jelikož je jejich součet nula, je aspoň jeden kladný a aspoň jeden záporný. Odtud již plyne že součet nezáporných výrazů má opačné znaménko než součet záporných výrazů (přičemž v jedné skupině jsou dvě čísla a ve druhé jedno), proto součet absolutních hodnot nezáporných výrazů je roven součtu absolutních hodnot záporných výrazů, což jsme měli dokázat.

Poznámka. Tvrzení o součtu výrazů také můžeme dokázat následujícím způsobem. Lineární funkce

$$f(x) = \frac{x - c}{(a - c)(b - c)} + \frac{x - a}{(b - a)(c - a)} + \frac{x - b}{(c - b)(a - b)}$$

nabývá v bodě a hodnotu

$$\frac{1}{b - c} + \frac{1}{c - b} = 0,$$

stejnou hodnotu nabývá také v bodech b a c, je tak nulová a nabývá hodnotu nula i v bodě $a + b + c$.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan a *Piotr Szatan*, II LO v Tarnovských Horách (Polsko).

Pavel Calábek