

- [7] *Frank, D. L.*: The drinking bird and the scientific method. *J. Chem. Edu.*, roč. 50 (1973), č. 3, s. 211. DOI [10.1021/ed050p211](https://doi.org/10.1021/ed050p211).
- [8] *Gaines, J. L.*: Dunking Duck. *Am. J. Phys.*, roč. 27 (1959), č. 3, s. 189–190. DOI [10.1119/1.1934801](https://doi.org/10.1119/1.1934801).
- [9] *Güémez, J. – Valiente, R. – Fiolhais, C. – Fiolhais, M.*: Experiments with the drinking bird. *Am. J. Phys.*, roč. 71 (2003), č. 12, s. 1257–1263. DOI [10.1119/1.1603272](https://doi.org/10.1119/1.1603272).
- [10] *Kolb, K. B.*: „Reciprocating“ engine. *The Physics Teacher*, roč. 4 (1966), č. 3, s. 121–122. DOI [10.1119/1.2350941](https://doi.org/10.1119/1.2350941).
- [11] *Lily, M. Ng. – Yvonne S. Ng.*: The thermodynamics of the drinking bird toy. *Phys. Educ.*, roč. 28 (1993), č. 5, s. 320. DOI [10.1088/0031-9120/28/5/014](https://doi.org/10.1088/0031-9120/28/5/014).
- [12] *Lorenz, R.*: Finite-time thermodynamics of an instrumented drinking bird toy. *American Journal of Physics*, roč. 74 (2006), č. 8, s. 677–682. DOI [10.1119/1.2190688](https://doi.org/10.1119/1.2190688).
- [13] *Mentzer R.*: The drinking bird – The little heat engine that could. *The Physics Teacher*, roč. 31 (1993), č. 2, s. 126–127. DOI [10.1119/1.2343682](https://doi.org/10.1119/1.2343682).
- [14] *Miller, J. S.*: Physics of the Dunking Duck, *Am. J. Phys.*, roč. 26 (1958), č. 1, s. 42–43. DOI [10.1119/1.1934601](https://doi.org/10.1119/1.1934601).
- [15] *Plumb, R., Wagner, R. E.*: Physical chemistry of the drinking duck. *J. Chem. Edu.*, roč. 50 (1973), č. 3, s. 213. DOI [10.1021/ed050p213.1](https://doi.org/10.1021/ed050p213.1).

# Nepřímé měření výstupního napětí Van de Graaffova generátoru

ČENĚK KODEJŠKA

Gymnázium, SOŠ a VOŠ, Komenského 77, Nový Bydžov

Van de Graaffův generátor (VdGG) je znám mezi učiteli fyziky především jako demonstrační nástroj pro vytvoření viditelného jiskrového výboje mezi koulí VdGG a menší vybíjecí koulí s plastovým držadlem. Velmi

efektní je také experiment, kterým můžeme přibližně zobrazit siločáry elektrického pole okolo hlavy testované osoby prostřednictvím jejích vlasů. Připomeňme též méně známé experimenty s rotujícím elektrostatickým větrníkem (známým také jako Hamiltonův mlýnek) umístěným na vrcholu VdGG, sršení náboje z hrotu způsobující ohyb plamene svíčky (elektrický vítr), levitace polystyrénových kuliček v akrylovém válci s kovovým dnem spojeným s VdGG, elektrostatická zvonkohra, aj. viz [1].

Moderní doba přináší i pokusy o spojení klasického experimentu např. s rozšířenou realitou [2], a musíme také zmínit i původní článek Roberta Van de Graaffa o využití VdGG coby zdroje vysokého napětí pro lineární urychlovače částic [3].

V tomto článku se nicméně chceme zaměřit na klasické využití VdGG jako zdroje vysokého napětí o velikosti řádově  $10^5$  V.

Metod, jak určit napětí VdGG, není mnoho a většinou poskytují jen orientační hodnoty výstupního napětí generátoru. S Van de Graaffovým generátorem, a zejména s jeho zdokonalováním, je historicky spojen doc. Jan Žouželka, který navrhl pro měření výstupního napětí VdGG elektrostatický rotační voltmetr [4].<sup>1)</sup> Moderní způsob výroby elektrostatického voltmetru je pak uveden např. v [5].

Teoretické výpočty napětí VdGG metodou rezonanční frekvence nebo modelace elektromagnetického tlumeného pulzu lze najít v [6], přibližný výpočet napětí při použití tzv. „gap“ metody, kdy se měří vzdálenost mezery mezi kulovými sférami, je pak uveden v [7].

V souladu s posledně zmíněným zdrojem je třeba uvést, že výstupní napětí VdGG není vždy stejné, jeho hodnotu ovlivňuje např. teplota a tlak okolního vzduchu nebo vlhkost vzduchu. Hlavním parametrem ovlivňujícím velikost výstupního napětí generátoru je pak i průměr koule VdGG, rychlost pohybu a šířka přenosového pásu a permitivity všech pohyblivých částí generátoru.

Jen čistě pro úplný přehled zde zmíníme i metodu kapacitních nebo odporových děličů, které uvádí [8], ale i tyto metody poskytují pouze orientační hodnoty napětí VdGG.

Cílem této práce bylo navrhnout takovou experimentální metodu, která by nejen poskytla přesnější hodnoty výstupního napětí VdGG, ale která by mohla být především využita na středních školách v rámci laboratorních cvičení.

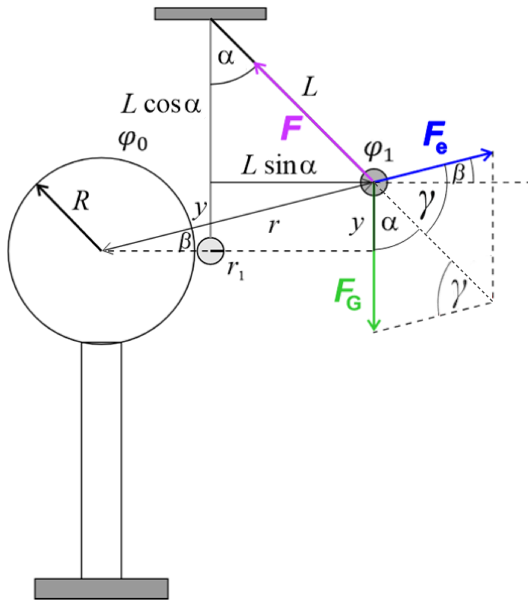
---

<sup>1)</sup>Bez zajímavosti není skutečnost, že tento článek věnoval jednomu ze zakladatelů olomoucké didaktiky fyziky prof. Josefu Fukovi k jeho 65. narozeninám.

## A. Teoretické odvození elektrického potenciálu na povrchu koule VdGG

Výpočet elektrické síly z výchylky kyvadla je podrobně uveden v online sbírce řešených úloh z fyziky [9], která vzniká od roku 2006 na Katedře didaktiky fyziky MFF UK. Většina úloh prošla odbornou recenzí a svým zaměřením pokrývají oblast ZŠ, SŠ i VŠ.

Na obr. 1 je znázorněn VdGG s poloměrem koule  $R$ , kyvadlo o délce  $L$  a poloměrem kuličky  $r_1$ , vzájemná vzdálenost středů obou koulí je  $r$ . Velikost elektrického potenciálu na povrchu koule VdGG je označena  $\varphi_0$ , velikost potenciálu ve vzdálenosti  $r$  od středu koule VdGG je označena  $\varphi_1$ .



Obr. 1 Elektrostatické kyvadlo s VdGG – působící síly

Uveďme nejprve některé matematické vztahy vyplývající ze situace na obr. 1. Pro výpočet úhlu  $\beta$  plyne v souladu s [9] následující vztah:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{R + r_1 + L \sin \alpha}, \quad (1)$$

kde  $y = L - L \cos \alpha = L(1 - \cos \alpha)$ .

## Výpočet elektrické síly z rovnoběžníku sil

Pro výpočet elektrické síly  $F_e$  vyjdeme ze sinové věty mezi silami  $F_e$ ,  $F_G$  a úhly  $\alpha$  a  $\gamma$ , ze které plyne vztah

$$F_e = \frac{F_G \sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{mg \sin \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha + \beta)} = \frac{mg \sin \alpha}{\cos(\alpha - \beta)}, \quad (2)$$

přičemž platí  $\gamma - \beta = 90^\circ - \alpha$  a obecně platný vztah  $\sin(90^\circ - x) = \cos x$ .

## Výpočet síly z Coulombova zákona

Platí-li současně, že velikost elektrické síly mezi dvěma nabitými koulemi, jejichž středy jsou ve vzájemné vzdálenosti  $r$ , je dána vztahem

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad (3)$$

můžeme z rovnosti vztahů (2) a (3) vyjádřit velikost náboje  $Q_1$  na kouli VdGG jako

$$Q_1 = \frac{mg \sin \alpha}{\cos(\alpha - \beta)} \frac{4\pi\epsilon r^2}{Q_2}. \quad (4)$$

Protože obecně platí  $Q = C\varphi$ , a kapacita malé koule kyvadla je dána vztahem  $C = 4\pi\epsilon r_1$ , můžeme do vztahu (4) dosadit za  $Q_2$  výraz  $4\pi\epsilon r_1 \varphi_0$ . Potenciál  $\varphi_0$  získá malá koule v okamžiku kontaktu s koulí VdGG. Rovnice (4) po dosazení a úpravě pak přejde na tvar

$$Q_1 = \frac{mg \sin \alpha}{\cos(\alpha - \beta)} \frac{r^2}{r_1 \varphi_0}. \quad (5)$$

## Výpočet potenciálu $\varphi_0$ na povrchu koule VdGG

Pro výpočet potenciálu  $\varphi_0$  na povrchu koule VdGG platí obecně známý vztah

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1}{R}, \quad (6)$$

ze kterého můžeme vyjádřit náboj  $Q_1$  rovnicí

$$Q_1 = 4\pi\epsilon R \varphi_0. \quad (7)$$

Dosazením vztahu (5) do rovnice (7) získáme výsledný vztah pro potenciál  $\varphi_0$ . Protože výstupní napětí VdGG je dáno rozdílem potenciálu  $\varphi_0$  a nulového potenciálu země, můžeme výsledný vztah pro potenciál  $\varphi_0$  současně považovat za vztah pro výstupní napětí VdGG, který je dán rovnicí

$$U_{\text{VdGG}} = \varphi_0 = \sqrt{\frac{mg \sin \alpha}{\cos(\alpha - \beta)} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{r^2}{r_1 R}}. \quad (8)$$

## B. Experimentální určení výstupního napětí VdGG

Při realizaci experimentu byl použit Van de Graaffův generátor s elektrickým pohonem 230 V / 50 Hz. Průměr koule generátoru je 28 cm, maximální zkratový proud  $I_{\text{max}} = 10 \mu\text{A}$ , rychlost otáček pásu 1 500 ot/min, kapacita vnitřního kondenzátoru cca 15 pF. Průměrná vlhkost vzduchu při realizaci experimentu byla 45 %.

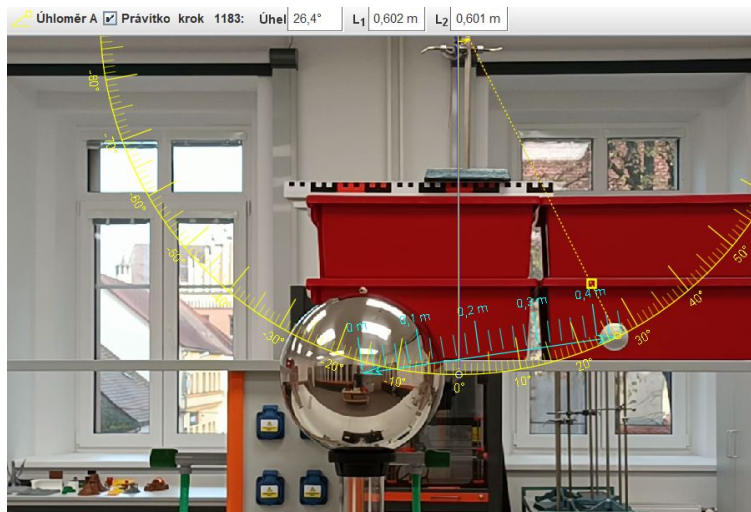
Před spuštěním VdGG byl míček kyvadla ve svislé poloze tak, aby se svým průměrem dotýkal koule generátoru v místě jejího průměru. Po zapnutí generátoru došlo nejprve k odchýlení kyvadla asi o  $15^\circ$ , pak se kyvadlo vrací díky gravitaci zpět do rovnovážné polohy. Ne vždy se ale dotkne koule VdGG. Teprve v okamžiku přímého kontaktu mezi oběma koulemi kyvadlo začne odskakovat do větších vzdáleností a výchylka závěsu kyvadla od svislého směru dosáhne své maximální hodnoty.

Při videoanalýze je pak třeba vzít v úvahu jen ty úhly, kdy kyvadlo kmitá ve svislé rovině, která je současně rovnoběžná s rovinou objektivu kamery. Pouze v tomto případě poskytuje kalibrační nástroj programu Tracker společně s nástrojem pro měření délky reálné hodnoty délek nekreslené perspektivou. Videozáznamy byly pořízeny mobilním telefonem, který byl fixován na stativu.

Jak plyne ze vztahu (8), metoda nepřímého měření výstupního napětí VdGG spočívá v určení hodnoty hmotnosti  $m$  kyvadla, maximální odchylky závěsu kyvadla od svislé polohy o úhel  $\alpha$ , změření poloměrů obou koulí a především změřením maximální vzdálenosti  $r$ , o kterou se kyvadlo vzdálí od středu VdGG. Protože jde o poměrně rychlý a dynamický proces, různá čidla jako např. Motion Detector od Vernieru, která jsou založená na ultrazvukové detekci, by se v praxi pro měření vzdálenosti  $r$  uplatnila jen velmi obtížně. Podobné je to s přesným změřením úhlu  $\alpha$ .

Proto jsme se rozhodli použít, jako už v některých jiných experimentech, kde je třeba analyzovat rychlý pohyb tělesa (viz např. [10]), videoanalýzu pomocí programu Tracker. Na obr. 2 je ukázka měřicích nástrojů

v programu Tracker, konkrétně úhloměru (žlutá barva) a délkového měřidla (světlemodrá barva). Protože program umožňuje relativně přesnou kalibraci vzdáleností pomocí známých rozměrů, jako je např. délka kyvadla v rovnovážné poloze, je měření touto metodou poměrně velmi přesné. Vzdálenosti lze měřit s přesností na cm s absolutní nejistotou 0,5 cm, úhly s přesností na stupně s absolutní nejistotou 0,5°.



Obr. 2 Videoanalýza v programu Tracker

Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 1. Měření bylo provedeno pro různé délky  $L$  kyvadel v intervalu hodnot 0,6 m až 1 m. Pingpongový míček potřený grafitem měl hmotnost  $m = 2,9$  g a poloměr  $r_1 = 2,0$  cm. Jako druhé kyvadlo byl použit plastový dutý míček s nástřikem Zn-Al barvy o hmotnosti  $m = 6,3$  g a poloměru  $r_1 = 2,4$  cm. Poloměr koule Van de Graaffova generátoru byl změřen v souladu s údaji výrobce jako  $R = 14$  cm.

Průměrná hodnota výstupního napětí z hodnot uvedených v tabulce 1 byla určena jako

$$U_{\text{VdGG}} = (150 \pm 5) \text{ kV}.$$

Hodnota udávaná výrobcem je v intervalu 150 kV až 200 kV, takže získaný výsledek je v dobrém souladu s tímto rozmezím.

Tabulka 1. Hodnoty napětí  $U_{\text{VdGG}}$  v závislosti na parametrech podle rovnice (8).

Pingpongový míček $m = 2,9 \text{ g}, r_1 = 2,0 \text{ cm}$				Plastový míček $m = 6,3 \text{ g}, r_1 = 2,4 \text{ cm}$			
$L/\text{m}$	$r/\text{cm}$	$\alpha/\beta$	$U/\text{kV}$	$L/\text{m}$	$r/\text{cm}$	$\alpha/\beta$	$U/\text{kV}$
1.0	70	$30^\circ/12^\circ$	154	1.0	61	$24^\circ/9^\circ$	163
0.8	66	$35^\circ/13^\circ$	157	0.8	53	$25^\circ/8^\circ$	143
0.6	59	$41^\circ/15^\circ$	155	0.6	46	$26^\circ/8^\circ$	129

## Závěr

Zabývali jsme se nepřímou metodou měření výstupního napětí Van de Graaffova generátoru a teoretickým odvozením vztahu pro potenciál na povrchu koule generátoru.

Průměrná hodnota výstupního napětí  $U = 150 \text{ kV}$  získaná pomocí měřících nástrojů v programu Tracker, ve kterém jsme prováděli videoanalýzu pohybu kyvadla, byla v souladu nejen s údaji výrobce, ale i s přibližnou „gap“ metodou, při které byla změřena průměrná vzdálenost mezi hlavní koulí VdGG a vybíjecí koulí při přeskoku jiskry cca 5–7 cm. To ve spojení s kritickou hodnotou intenzity  $E = 3 \text{ MV/m}$ , při které dojde k průrazu vzduchového dielektrika, vede k hodnotě výstupního napětí v rozmezí 150 kV až 210 kV.

Výhodou této metody je nejen poměrně přesné a snadné určení napětí Van de Graaffova generátoru pomocí videoanalýzy pohybu kyvadla, ale současně lze tento netradiční experiment realizovat v rámci laboratorních prací na střední škole, čímž lze obohatit nejen gymnaziální kurikulum o atraktivní badatelskou aktivitu, ale zejména o zkušenost, kterou si žák ve škole při práci s Van de Graaffovým generátorem osvojí.

## Literatura

- [1] Van de Graaff generator. [https://www.science2education.co.uk/handlers/libraryFiles.ashx?filename=Manuals\\_P\\_PY5500\\_A.pdf](https://www.science2education.co.uk/handlers/libraryFiles.ashx?filename=Manuals_P_PY5500_A.pdf)
- [2] Wildan, A. et al.: Augmented Reality Experiment with a Van de Graaff Generator. Phys. Teach., roč. 60 (2022), s. 475–477.

- [3] *Van de Graaff, R., Compton, K. T., Van Atta, L. C.*: The electrostatic production of high voltage for nuclear investigations. *Phys. Rev.*, roč. 43 (1933), s. 149–157.
- [4] *Žouželka, J., Trčka, Z.*: Nové přístroje pro pokusy z elektrostatiky. *Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, Fac. Rer. Nat.. Mathematica–Physica–Chemica*, roč. 12 (1972), č. 1, s. 293–303.
- [5] *Tant, P., Bolsens, B., Sels, T., Dommelen, D., Driesen, J., Belmans, R.*: Design and application of a field mill as a high-voltage DC meter. In: *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, roč. 56 (2007), č. 4, s. 1459–1464. <http://dx.doi.org/10.1109/TIM.2007.900157>
- [6] *Kress, R. J.*: Analysis of a Van De Graaff Generator for EMP Direct Current Survivability Testing. *Theses and Dissertations*, 935, (2013). [online]. <https://scholar.afit.edu/etd/935>
- [7] *Jaitu, A., Lohar, A., Patil, S., Mokal, V., Kasar, N.*: Design and implementation of Van de Graaff generator. *International Journal of Innovative Science and Research Technology*, roč. 5 (2020). <http://dx.doi.org/10.38124/IJISRT20SEP274>
- [8] *Hnyk, M.*: Elektrostatické generátory. *Bakalářská práce, KDF MFF UK Praha*, 2012. [online]. [https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/40387/BPTX\\_2011\\_1\\_\\_0\\_283653\\_0\\_115133.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/40387/BPTX_2011_1__0_283653_0_115133.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- [9] Elektrické kyvadélko v poli nabité koule (velká výchylka). [online]. [https://reseneulohy.cz/153/elektricke-kyvadelko-v-poli-nabite-koule-\(velka-vychylka\)](https://reseneulohy.cz/153/elektricke-kyvadelko-v-poli-nabite-koule-(velka-vychylka))
- [10] *Kodejška, Č., Richterek, L., Říha, J.*: Buquoy’s problem in an introductory physics course. *J. Phys.: Conf. Ser.* 1512 012003 (2020). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1512/1/012003>



Zdroj: Elektrostatické pole. <http://old.spsemoh.cz/vyuka/zae/el5.htm>