ZPRÁVY

Ústřední kolo 73. ročníku MO kategorie A

Ústřední kolo 73. ročníku Matematické olympiády kategorie A uspořádalo ve dnech 17.–20. března 2023 Gymnázium, České Budějovice, Jírovcova 8. Záštitu nad ním převzali *doc. Dr. Ing. Dagmar Škodová Parmová*, primátorka statutárního města České Budějovice a *Mgr. Pavel Klíma*, náměstek hejtmana Jihočeského kraje a poslanec Parlamentu ČR. Na uspořádání ústředního kola se dále podílela Ústřední komise matematické olympiády, Jednota českých matematiků a fyziků a Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR.

Všichni soutěžící, členové Ústřední komise komise MO a pozvaní hosté byli ubytováni v grandhotelu Zvon, slavnostní zahájení soutěže a její vyhlášení proběhlo v obřadní síni historické českobudějovické radnice a vlastní soutěž pak na gymnáziu Jírovcova. Na slavnostním zahájení přivítal soutěžící hlavní organizátor *Mgr. Radek Trča*, *Mgr. Pavel Kavřík*, ředitel gymnázia, nositelé záštity a nechyběla ani tradiční motivační přednáška *doc RNDr. Jaromíra Šimši, CSc.*

Na základě jednotné koordinace úloh krajského kola kategorie A pozvala Ústřední komise MO k účasti v ústředním kole 51 nejlepších účastníků, mezi nimiž bylo 6 dívek. Na řešení obou trojic soutěžních úloh měli soutěžící po oba dny, 18. a 19. března, vždy 4,5 hodiny čistého času. Za každou úlohu mohli soutěžící získat nejvýše 7 bodů (s celočíselnými bodovými zisky).

Organizátoři závěrečného kola MO připravili pro soutěžící a pro členy ústřední komise pestrý doprovodný program. Odpoledne po prvním soutěžním dnu absolvovali prohlídku města. Druhý den to pak byla návštěva místní hvězdárny a planetária a projekce oskarového filmu „Oppenheimer“.

Vyhlášení výsledků soutěže a předání cen nejlepším řešitelům IV. kola kategorie A se uskutečnilo ve středu 20. března dopoledne. Slavnostního aktu se zúčastnili také zástupci skupiny ČEZ, kteří speciálně ocenili tři nejlepší řešitele ústředního kola soutěže. Předseda ÚK MO *doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.* v závěrečném projevu poděkoval celému týmu organizátorů za kvalitní přípravu a mimořádně zdařilý průběh celého ústředního kola.

Dle organizačního řádu Matematické olympiády bylo vyhlášeno jedenáct vítězů ústředního kola, absolutním vítězem se pak stal *David Hromádka* z G Nad Alejí v Praze 6 se ziskem 40 bodů. Dále bylo oceněno třináct úspěšných řešitelů. Podrobnější výsledky najdete na stránkách 73. ročníku MO. Zde najdete také vzorová řešení soutěžních úloh, jejichž zadání uvádíme níže.

1. soutěžní den (18. března)

1. Nechť a, b, c jsou přirozená čísla, pro něž se jedna z hodnot

$$\mathrm{D}(a,b)\cdot\mathrm{n}(b,c),$$
$$\mathrm{D}(b,c)\cdot\mathrm{n}(c,a),$$
$$\mathrm{D}(c,a)\cdot\mathrm{n}(a,b)$$

rovná součinu zbylých dvou. Dokažte, že některé z čísel a, b, c je násobkem jiného z nich.

(Symbol $\mathrm{D}(x,y)$, resp. $\mathrm{n}(x,y)$, značí největší společný dělitel, resp. nejmenší společný násobek, přirozených čísel x, y.)

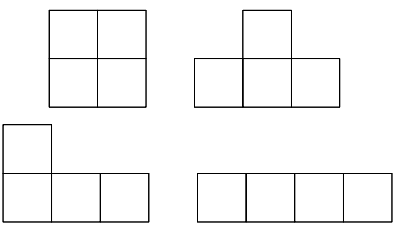
(*Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec*)

2. Vnitřní bod P konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ splňuje rovnosti

$$|\sphericalangle PAD| = |\sphericalangle ADP| = \\ = |\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle CPD|.$$

Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku CPD. Dokažte, že platí $|OA| = |OB|$. (*Patrik Bak*)

3. Určete největší přirozené číslo n s vlastností: Libovolnou sadu n tetramin, z nichž každé je jednoho ze čtyř tvarů na obrázku, lze bez překrývání umístit do tabulky 20×20 tak, že každé tetramino pokrývá právě čtyři pole tabulky. (Jednotlivá tetramina můžeme libovolně otáčet a překlápět.)



(*Josef Tkadlec*)

2. soutěžní den (19. března)

4. Na párty se sešlo 10 chlapců a 10 dívek. Každému chlapci se líbí jiný kladný počet dívek. Každé dívce se líbí jiný kladný počet chlapců. Určete největší celé číslo n s následující vlastností: Vždy lze utvořit aspoň n disjunktních párů, v nichž se oběma líbí ten druhý. (*Josef Tkadlec*)

5. Posloupnost reálných čísel $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ splňuje pro každý index $k \geq 1$ rovnost

$$a_{k+1} = 3a_k - \lfloor 2a_k \rfloor - \lfloor a_k \rfloor.$$

Určete všechna přirozená čísla n, pro která je taková posloupnost s prvním členem $a_1 = 1/n$ od jistého členu konstantní.

(Zápisem $\lfloor x \rfloor$ rozumíme největší celé číslo, které nepřevyšuje dané reálné číslo x.) (*Jaromír Šimša*)

6. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, do nichž lze vepsat dvě shodné kružnice s prvočíselným poloměrem, které mají vnější dotyk, obě se dotýkají přepony a každá z nich se dotýká jiné odvěsny.

(*Jaromír Šimša*)

Všichni vítězové a nejlepší úspěšní řešitelé z nematuritních ročníků byli pozváni na výběrové soustředění, kde budou bojovat o místa v reprezentačních družstvech na Mezinárodní matematickou olympiádu ve Velké Británii a Středoevropskou matematickou olympiádu v Maďarsku. Nejlepší řešitelé z nematuritních ročníků pak budou v pozváni na tradiční zářijové soustředění nejlepších řešitelů kategorie A do Janských Lázní.

Pavel Calábek