K obsahům pravoúhelníků opsaných elipse

MAREK JUKL – LENKA JUKLOVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V tomto článku se budeme zabývat dvěma extremálními vlastnostmi pravoúhelníků opsaných dané elipse (v eukleidovské rovině) tak, že každá z jejich stran se dotýká dané elipsy. Zaměříme se zde na otázku, jak prostředky elementární matematiky určit, který z pravoúhelníků opsaných elipse má *největší*, resp. *nejmenší* obsah.[1)]

Jak známo, ke každé elipse existuje kartézská soustava souřadnic, v níž je dána rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

kde a, b jsou kladná reálná čísla ($a \neq b$; neuvažujeme speciálně kružnice).

Dále uvažujme přímku t zadanou rovnicí ve směrnicovém tvaru

$$t\colon y = kx + q, \tag{2}$$

kde k, q jsou reálná čísla, $k \geq 0$. Protože hledáme pravoúhelník opsaný elipse, určíme q tak, aby přímka t byla tečnou elipsy (tehdy má na přímce t smysl hledat stranu takového pravoúhelníku).

Rovnici (1) upravíme do tvaru $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ a z rovnice (2) dosadíme za y. Dostaneme tak

$$b^2x^2 + a^2(k^2x^2 + 2kqx + q^2) - a^2b^2 = 0,$$

[1)] Pro úplnost dodejme, že elementárními prostředky lze snadno nalézt pravoúhelník elipse *vepsaný* s maximálním, resp. minimálním obsahem (viz [1]).

odkud po úpravě obdržíme následující kvadratickou rovnici o neznámé x

$$(b^2 + k^2a^2)x^2 + 2kqa^2x + a^2(q^2 - b^2) = 0. \tag{3}$$

Přímka je tečnou elipsy, právě když má s elipsou společný právě jeden bod. To nastane, právě když diskriminant D rovnice (3) je roven nule, tj. právě když

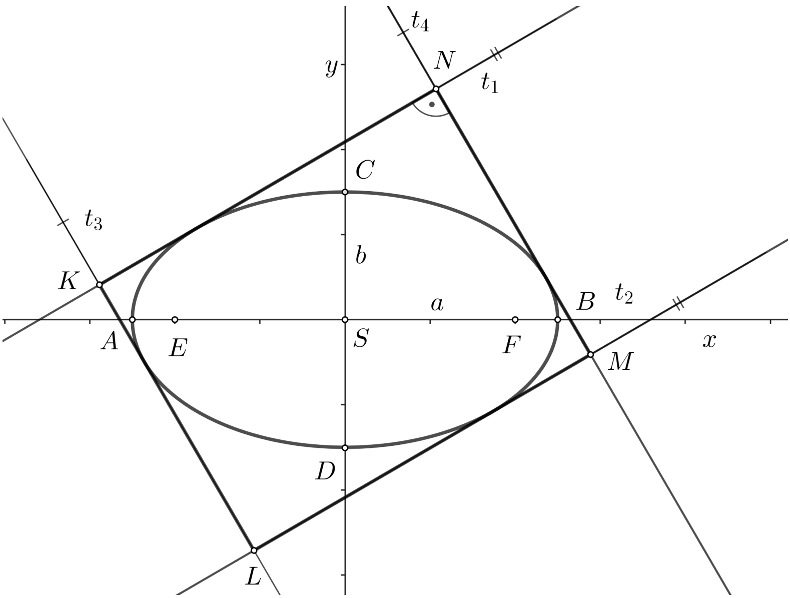
$$D = 4k^2q^2a^4 - 4(b^2 + k^2a^2)a^2(q^2 - b^2) = 0.$$

Po úpravě (s využitím nenulovosti čísel a, b) zjistíme, že rovnost $D = 0$ je ekvivalentní podmínce $b^2 + k^2a^2 - q^2 = 0$, odtud

$$q = \pm\sqrt{b^2 + k^2a^2}.$$

Získali jsme dvě tečny souměrné podle středu S elipsy (obr. 1), jejichž obecné rovnice mají tvar

$$t_1\colon kx - y + \sqrt{b^2 + k^2a^2} = 0,$$
$$t_2\colon kx - y - \sqrt{b^2 + k^2a^2} = 0.$$



Obr. 1

Určíme-li tečny směru kolmého k t_1, t_2, pak jejich průsečíky s t_1, t_2 určí vrcholy opsaného pravoúhelníku. Zřejmě obecné rovnice tečen t_3, t_4 kolmých k přímkám t_1, t_2 mají tvar

$$x + ky + c = 0.$$

Analogickým postupem určíme c a obdržíme obecné rovnice tečen t_3 a t_4:

$$t_3\colon x + ky - \sqrt{a^2 + k^2b^2} = 0,$$
$$t_4\colon x + ky + \sqrt{a^2 + k^2b^2} = 0.$$

Pro zjednodušený zápis dalších výpočtů zavedeme označení:

$$m = a^2 + k^2b^2, \qquad n = b^2 + k^2a^2, \tag{4}$$

tedy m, n jsou kladná reálná čísla. Obecné rovnice tečen jsou tedy tvaru

$$\begin{aligned}
t_1\colon\ & kx - y + \sqrt{n} &= 0,\\
t_2\colon\ & kx - y - \sqrt{n} &= 0,\\
t_3\colon\ & x + ky - \sqrt{m} &= 0,\\
t_4\colon\ & x + ky + \sqrt{m} &= 0.
\end{aligned}$$

Jsou-li přímky t_1, t_2 různoběžné se souřadnicovou osou x, můžeme rovnice přímek t_3, t_4 vyjádřit ve směrnicovém tvaru $y = -\frac{1}{k}x \pm \frac{\sqrt{m}}{k}$. Mají-li přímky t_1, t_2 obecné rovnice $y = \pm\sqrt{n}$ (tj. $k = 0$), pak přímky t_3, t_4 mají rovnice $x = \pm\sqrt{m}$. Můžeme tedy vždy označit t_1, t_2 ty tečny elipsy, pro které je $k \in \langle 0; 1\rangle$. Bez újmy na obecnosti lze tedy předpokládat, že $k \in \langle 0; 1\rangle$.

K tomu, abychom mohli určit obsah opsaných pravoúhelníků, potřebujeme znát délky jejich stran. Vzhledem k tomu, že jejich strany leží na navzájem rovnoběžných přímkách, stačí určit ze známého vztahu (viz např. [2]) vzdálenost rovnoběžných přímek.

Pro vzdálenost $\rho(p, q)$ rovnoběžných přímek p, q v rovině daných po řadě obecnými rovnicemi $p\colon a_1x + a_2y + a_0 = 0$ a $q\colon a_1x + a_2y + a_0' = 0$ platí, jak známo

$$\rho(p, q) = \frac{|a_0 - a_0'|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}.$$

Platí tedy (obr. 1)

$$\rho(t_1, t_2) = |KL| = \frac{|2\sqrt{n}|}{\sqrt{k^2+1}}, \qquad \rho(t_3, t_4) = |LM| = \frac{|2\sqrt{m}|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Odtud tedy již přímo můžeme určit obsah $\mathcal{S}$ pravoúhelníku $KLMN$. Platí

$$\mathcal{S} = \frac{4\sqrt{mn}}{k^2+1}, \tag{5}$$

kde m, n jsou dány vztahy (4).

Nejprve si položme otázku, který z opsaných pravoúhelníků má *největší* obsah.

Maximální hodnotu výrazu na pravé straně rovnosti (5) lze určit bez užití diferenciálního počtu. Stačí si totiž uvědomit, že výraz $\sqrt{mn}$ udává tzv. *geometrický průměr* kladných reálných čísel m, n. Můžeme proto využít nerovnost mezi geometrickým a aritmetickým průměrem ve tvaru

$$\sqrt{mn} \le \frac{m+n}{2},$$

přičemž rovnost v ní nastává, právě když $m = n$. V našem případě tak z (5) plyne

$$\mathcal{S} = \frac{4}{k^2+1} \cdot \sqrt{mn} \le \frac{4}{k^2+1} \cdot \frac{m+n}{2}.$$

Dosadíme-li do pravé strany této nerovnosti za m, n ze vztahu (4), lze výraz na její pravé straně psát ve tvaru

$$2 \cdot \frac{(a^2+b^2) + k^2(a^2+b^2)}{k^2+1} = 2 \cdot \frac{(k^2+1)(a^2+b^2)}{k^2+1} = 2(a^2+b^2),$$

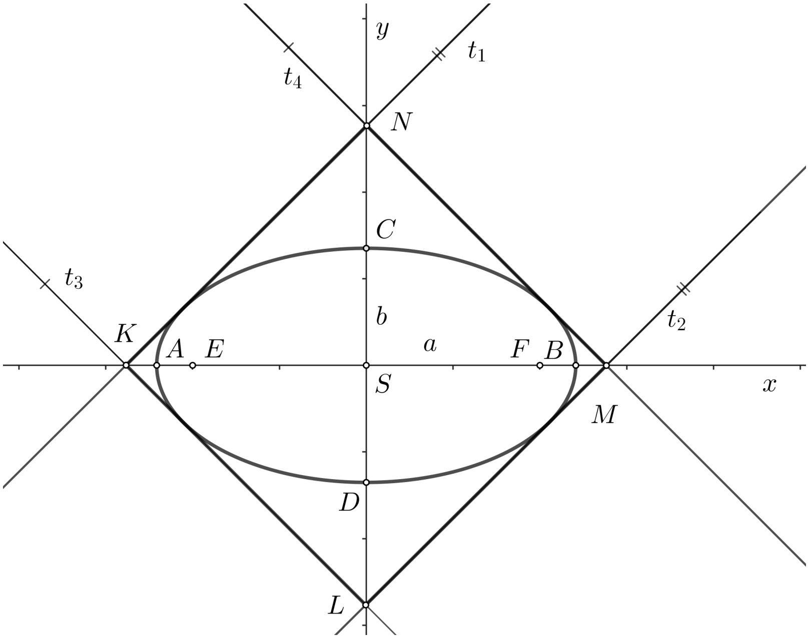
tedy pro horní odhad obsahu plyne $\mathcal{S}_{\max} = 2(a^2+b^2)$.

Této hodnoty nabývá obsah $\mathcal{S}$, právě když $m = n$, neboli, po dosazení za m, n ze vztahu (4), platí $a^2 + b^2k^2 = b^2 + a^2k^2$, tj. $(1-k^2)(a^2-b^2) = 0$. To vzhledem k předpokladu $k \in \langle 0; 1\rangle$ a $a \neq b$ nastane, právě když $k = 1$.

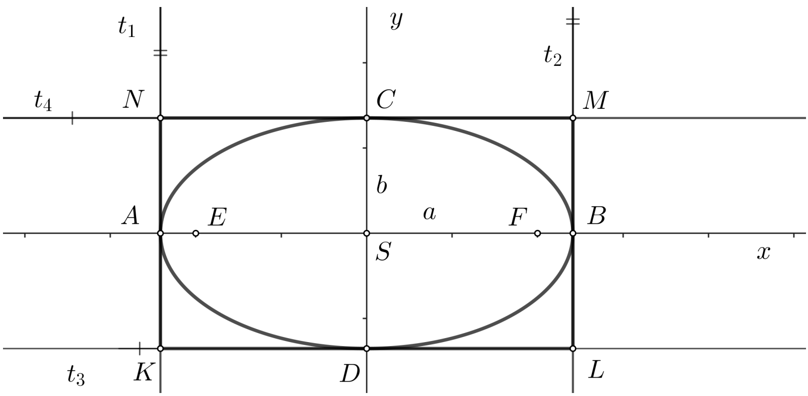
Pravoúhelník maximálního obsahu opsaný elipse je tedy čtverec s vrcholy na osách elipsy. Jak patrno, je souměrný podle os elipsy a jeho strany leží na přímkách o rovnicích $x - y \pm \sqrt{a^2+b^2} = 0$ a $x + y \pm \sqrt{a^2+b^2} = 0$ (obr. 2). Jeho obsah je $\mathcal{S}_{\max} = 2(a^2+b^2)$.

Nyní se zabývejme druhou otázkou, tj. který z opsaných pravoúhelníků má *nejmenší* obsah. Intuitivně lze očekávat, že minimálního obsahu dosáhneme pro pravoúhelník znázorněný na obr. 3.

Dokážeme tedy, že *nejmenší* obsah má pravoúhelník se stranami rovnoběžnými s osami elipsy, tj. $\mathcal{S}_{\min} = 4ab$.



Obr. 2



Obr. 3

Použijeme-li opět vztah (5), do něhož dosadíme z (4), obdržíme

$$\mathcal{S} = \frac{4}{k^2+1}\sqrt{(a^2+k^2b^2)(b^2+k^2a^2,)}. \tag{6}$$

K tomu, abychom ověřili, že hodnota $4ab$ je dolním odhadem obsahu opsaných pravoúhelníků, je, s ohledem na (6), nutné a stačí verifikovat ekvivalentní nerovnost

$$\sqrt{(a^2+k^2b^2)(b^2+k^2a^2)} \geq (k^2+1)ab.$$

S ohledem na nezápornost obou stran této nerovnosti obdržíme po jejich umocnění a jednoduché úpravě s ní ekvivalentní nerovnost

$$k^2(a^2-b^2)^2 \geq 0. \tag{7}$$

Dále je zřejmé, že hodnoty $4ab$ nabývá obsah $\mathcal{S}$, právě když v nerovnosti (7) nastane rovnost, neboli, právě když $k^2(a^2-b^2)^2 = 0$. To s ohledem na předpoklad $a \neq b$ nastane, právě když $k = 0$.

Pravoúhelník minimálního obsahu opsaný elipse je tedy obdélník, jehož strany leží na přímkách $x = \pm a$ a $y = \pm b$. Jak patrno, je souměrný podle os elipsy a jeho strany jsou částí vrcholových tečen elipsy (obr. 3). Obsah tohoto pravoúhelníku je roven $\mathcal{S}_{\min} = 4ab$.

Závěr

Hledaným pravoúhelníkem maximálního obsahu opsaným elipse (1) je čtverec s vrcholy ležícími na osách elipsy o obsahu $\mathcal{S}_{\max}$ a pravoúhelníkem minimálního obsahu je obdélník se stranami ležícími na vrcholových tečnách elipsy o obsahu $\mathcal{S}_{\min}$, přičemž pro obsah $\mathcal{S}$ platí nerovnosti

$$\mathcal{S}_{\min} = 4ab \leq \mathcal{S} \leq 2(a^2+b^2) = \mathcal{S}_{\max}.$$

Dalším zajímavým problémem, který ponecháváme čtenářům, je například nalezení pravoúhelníků opsaných či vepsaných elipse s extremálním obvodem.

Literatura

[1] *Hroník, J.*: Úlohy o maximech a minimech funkcí. ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, Mladá fronta, 1967.

[2] *Kočandrle, M.*: Matematika pro gymnázia. Analytická geometrie. JČMF. Prometheus, 2009.