Rozvíjení znalostí žáků s podporou GeoGebry

JARMILA ROBOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

GeoGebra, program dynamické matematiky, resp. dynamické geometrie, patří k často využívaným digitálním nástrojům ve výuce matematiky od základní až po vysokou školu, a to nejen u nás, ale i v zahraničí, například [1]. K rozšíření GeoGebry u nás přispěla nejen její dostupnost pro učitele i žáky (bezplatný software, česká lokalizace) či uživatelsky přívětivé prostředí, ale zejména to, že nástroje a příkazy GeoGebry pokrývají běžně vyučovaná matematická témata základní i střední školy a podporují konstruktivistický přístup k výuce.

GeoGebra nabízí nejen rýsovaní geometrických objektů či zobrazovaní grafů funkcí, ale zejména její dynamické nástroje mohou podpořit porozumění žáků, jak dokládá řada výzkumných studií [4, 5].

Následující příklady zahrnují ilustrace výukových situací, kdy s pomocí vhodně vytvořených problémů lze formou „experimentování" s matematickými objekty v prostředí GeoGebry dovést žáky k „objevování" matematických vlastností a vztahů. Tyto příklady jsou věnovány učivu druhého stupně základní školy, resp. víceletého gymnázia, některé jsou zaměřeny na látku čtyřleté střední školy.

V uvedených ilustracích předpokládáme, že žáci samostatně či ve dvojicích pracují na počítači, resp. tabletu. Při řešení příkladů z tématu funkce si zobrazíme v nákresně GeoGebry souřadnicové osy x, y a také čtvercovou síť; naopak v tématech ze syntetické geometrie obvykle zobrazení os soustavy souřadnic, resp. čtvercové sítě, vypínáme.

Následující dvě ilustrace se zaměřují na vlastnosti grafů lineárních a kvadratických funkcí.

Ilustrace 1

Lineární funkci s předpisem $f\colon y = ax + b$, kde a, b jsou reálná čísla[1)], se žáci obvykle učí v 9. ročníku základní školy, a to jako zobecnění přímé

[1)] V některý učebnicích matematiky se uvádí $a \neq 0$, např. [2].

úměrnosti. S podporou GeoGebry mohou snadno zkoumat vliv koeficientů a, b na graf a vlastnosti lineární funkce.

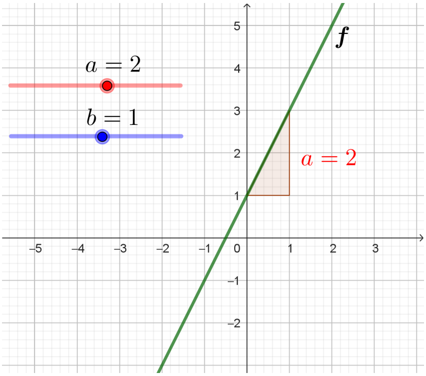
Metodické poznámky

Nejdříve se žáky sestrojíme v nákresně programu posuvníky, které mají význam koeficientů a a b; hodnoty posuvníků nastavíme například od -15 do 15 s krokem 0,1. Na posuvnících zvolíme konkrétní hodnoty $a = 2$, $b = 1$. Než zapíšeme funkční předpis, uvědomíme si, že v programu GeoGebra zadáváme do vstupního pole předpisy lineárních či kvadratických funkcí vždy ve tvaru $f(x) = \dots$, $g(x) = \dots$, neboť zápis $y = \dots$ program interpretuje jako rovnici přímky u lineárních funkcí, nebo jako rovnici kuželosečky u kvadratických funkcí (to ovlivní funkčnost některých nástrojů a příkazů). Do vstupního řádku tedy zapíšeme obecný předpis $f(x) = ax+b$ a zobrazíme graf funkce.

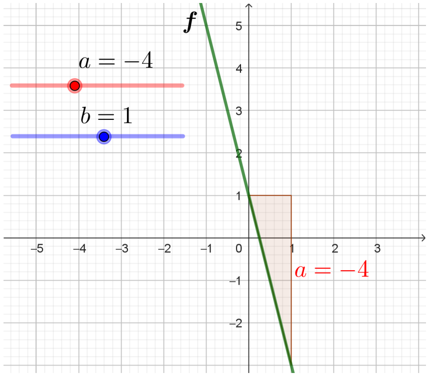
Žákům zadáme samostatnou práci, ve které mají v nákresně měnit pouze hodnoty posuvníku a, pozorovat, co se děje s grafem a své poznatky si zapsat. Většina z nich pravděpodobně dospěje k následujícím zjištěním: grafem lineární funkce je přímka, která pro $a > 0$ „stoupá“ ve směru osy x a pro $a < 0$ „klesá“ ve směru osy x; pro $a = 0$ je grafem přímka rovnoběžná s osou x, jedná se o graf konstantní funkce. Můžeme poté s žáky diskutovat o vlivu koeficientu a na „stoupání“, či „klesání“ přímky a představit geometrickou interpretaci koeficientu a jako „sklonu“, resp. směrnice přímky, pomocí nástroje *Spád*. Uvedený nástroj GeoGebry zobrazí pravoúhlý trojúhelník s přeponou na grafu–přímce; jeho horizontální odvěsna má jednotkovou délku a vertikální odvěsna má délku a jednotek[2)]. Vertikální odvěsna je tak geometrickou reprezentací směrnice přímky (obr. 1 a 2). Pro $a > 0$ lze vypozorovat, že čím větší je směrnice, tím přímka rychleji „stoupá“; obdobně pro $a < 0$ mohou žáci dospět k poznatku, že čím menší je směrnice přímky, tím přímka rychleji „klesá“. Na základě pozorování tak lze intuitivně zavést již pro žáky pochopitelné pojmy *rostoucí* a *klesající funkce*.

Dále požádáme žáky, aby nastavili posuvník a např. na hodnotu 1, sestrojili průsečík B grafu funkce s osou y (včetně zobrazení jeho souřadnic v nákresně) a dále měnili jen hodnoty posuvníku b. Tak zkoumají vliv tohoto koeficientu na graf funkce. Obvykle několik žáků vypozoruje, že koeficient b odpovídá y-ové souřadnici průsečíku B grafu s osou y (obr. 3 a 4).

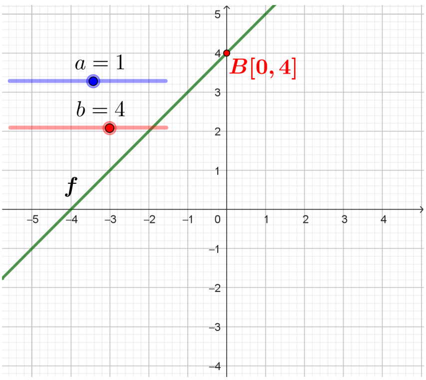
[2)] Pro $a < 0$ odpovídá délka vertikální odvěsny absolutní hodnotě koeficientu a.



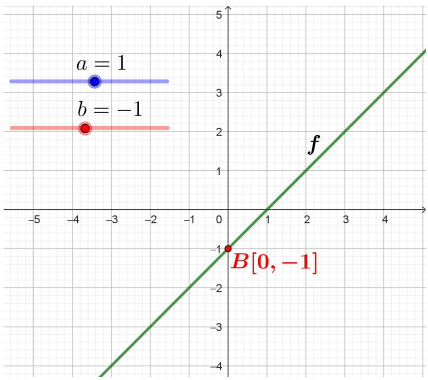
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Na závěr můžeme žáky požádat, aby se pokusili změnami koeficientů a, b získat graf-přímku, která je rovnoběžná s osou y. Poté, po neúspěšných pokusech, s nimi můžeme rozebrat, proč to nelze.

Ilustrace 2

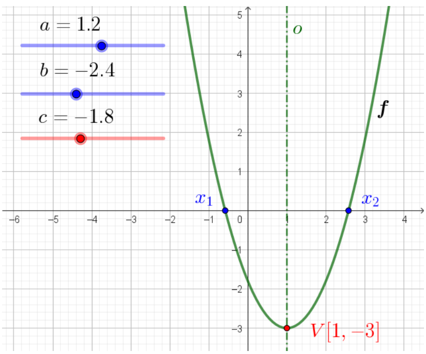
Obdobným způsobem jako v ilustraci 1 můžeme nechat žáky zkoumat vlastnosti grafu kvadratické funkce zadané předpisem $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde čísla a, b, c jsou reálná, $a \neq 0$.

Metodické poznámky

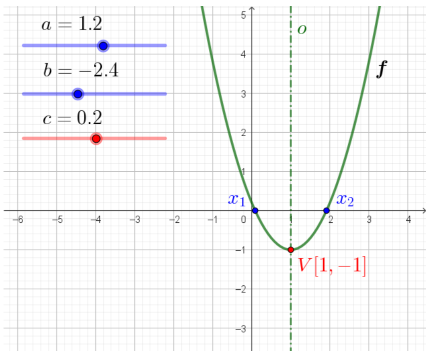
V prostředí GeoGebry nejdříve se žáky sestrojíme tři posuvníky pro koeficienty a, b, c; rozmezí jejich hodnot nastavíme např. od -10 do 10 s krokem 0,1. Před zadáním předpisu funkce zvolíme na posuvnících hodnoty $a = 1$, $b = c = 0$, poté zadáme předpis uvedený výše do vstupního řádku a v nákresně získáme graf – parabolu, která prochází počátkem a je souměrná podle osy y.

Žáci dostanou za úkol měnit hodnoty pouze na posuvníku a, čímž mohou zkoumat vliv tohoto koeficientu na graf, případně i na vlastnosti kvadratické funkce. Na základě zkušeností lze říci, že většina z nich dospěje ke zjištěním, která lze shrnout následovně: pro $a > 0$ je graf-parabola „rozevřen nahoru", s rostoucím kladným koeficientem a se parabola více přimyká k ose y; pro $a < 0$ je parabola „rozevřena dolů" a se zmenšujícím se záporným a se parabola opět více přimyká k ose y. Současně mají žáci možnost si ujasnit, proč je z definice kvadratické funkce vyloučena hodnota $a = 0$, neboť pro tuto hodnotu je grafem přímka, tj. jedná se o graf lineární funkce.

Před zkoumáním vlivu koeficientu c je vhodné nastavit posuvníky na $a = 1$, $b = 0$ a poté měnit pouze hodnoty c. I zde žáci mohou vypozorovat, že pro $c > 0$ se graf posouvá nahoru ve směru kladné poloosy y; pro $c < 0$ se graf naopak posouvá dolů ve směru záporné poloosy y. Pro $c = 0$ leží bod $[0, 0]$ na parabole. Dále pomocí příkazu *Extrem(f)* vyznačíme na parabole vrchol V a zaměříme pozornost žáků na jeho x-ovou souřadnici. Žáci snadno zjistí, že měníme-li pouze hodnoty posuvníku c, tak se vrchol V pohybuje po ose o souměrnosti paraboly, tj. po ose y. Z toho je zřejmé, že x-ová souřadnice vrcholu se nemění, tedy nezávisí na hodnotě c. To mohou žáci prověřit tím, že například nastaví $a = 1{,}2$, $b = -2{,}4$ a opět mění jen hodnoty c na posuvníku (obr. 5, obr. 6).



Obr. 5



Obr. 6

Uvedené zjištění lze použít k určení souřadnic vrcholu V paraboly, a to pomocí x-ových souřadnic průsečíků paraboly s osou x; označíme je x_1, x_2 (obr. 5 a obr. 6). Žáci přitom využijí znalost řešení kvadratické rovnice, neboť uvedená čísla x_1 a x_2 jsou současně kořeny příslušné kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$, kde a, b, c jsou hodnoty nastavené na posuvnících. Pro její kořeny platí

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

To, že x-ová souřadnice vrcholu V je stejná pro pevně dané hodnoty a, b a měnící se c, platí i pro hodnotu $c = 1{,}2$, kdy má parabola s osou x jediný společný bod V. Příslušná kvadratická rovnice má pak jeden (dvojnásobný) kořen a pro její diskriminant D platí $D = b^2 - 4ac = 0$. Po dosazení 0 za diskriminant do vzorce pro kořeny získáme x-ovou souřadnici bodu V jako

$$x_{1,2} = x = \frac{-b}{2a}.$$

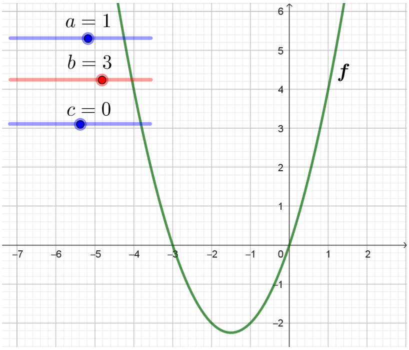
Souřadnici y vrcholu V určíme z předpisu funkce f dosazením výrazu $\frac{-b}{2a}$ za x:

$$y = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = c - \frac{b^2}{4a}.$$

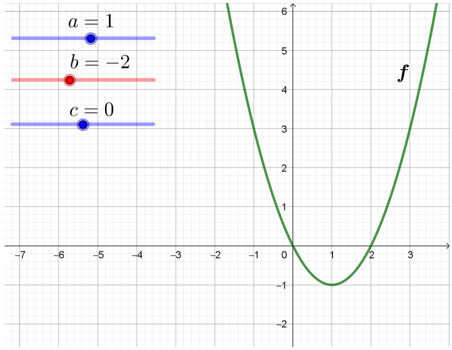
Souřadnice vrcholu V paraboly jsou $\left[\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right]$.

Jako poslední budou žáci zkoumat vliv koeficientu b při nastavených hodnotách $a = 1$, $c = 0$. Ještě před změnou hodnot b se můžeme žáků zeptat, jak odhadují vliv změn koeficientu b na graf kvadratické funkce. Poměrně častá odpověď je, že parabola se bude posouvat podél osy x. Žáci však poté sami v prostředí GeoGebry rychle zjistí, že tomu tak není (obr. 7, kde $b = 3$; obr. 8, kde $b = -2$), neboť parabola mění své umístění nejen z hlediska osy x, ale i osy y.

Pro posouzení toho, jaký je tedy vliv koeficientu b na graf funkce, žákům doporučíme, aby si příkazem *Extrem(f)* zapsaným do vstupního pole GeoGebry opět zobrazili vrchol V paraboly, zapnuli jeho stopu a měnili hodnoty parametru b. Velmi rychle dospějí k poznatku, že při změně b se vrchol V pohybuje po křivce, která je zřejmě také parabolou (obr. 9). Zdůvodnění zjištěného poznatku však pro žáky není snadné, obvykle potřebují pomoc učitele, aby je pomocí návodných otázek dovedl k následujícímu vysvětlení.



Obr. 7

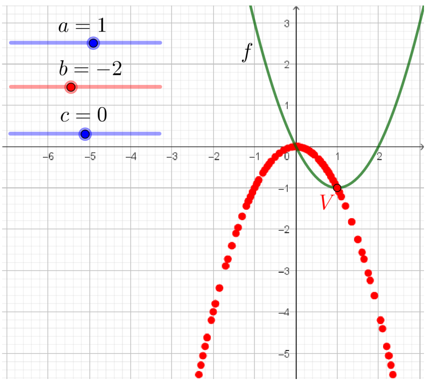


Obr. 8

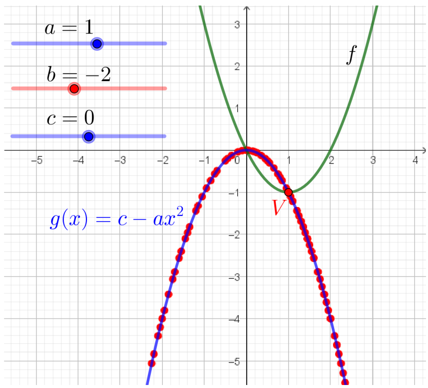
Vrchol V paraboly, která je grafem funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, má souřadnice

$$x = \frac{-b}{2a}, \qquad y = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Je zřejmé, že y-ová souřadnice vrcholu V paraboly vyjadřuje „kvadratickou závislost“ na proměnné b. Vyjádříme-li b z x-ové souřadnice bodu V jako $b = -2ax$ a poté výraz $-2ax$ dosadíme za b do y-ové souřadnice bodu V, získáme vztah $y = c - ax^2$. Předpis této „nové“ kvadratické funkce ve tvaru $g(x) = c - ax^2$ můžeme opět zadat do vstupního pole GeoGebry, zobrazit její graf a změnami hodnot b ověřit, že jsme předpis určili správně, tj. že stopy bodu V leží na grafu funkce g (obr. 10).



Obr. 9



Obr. 10

Následující dvě ilustrace využití GeoGebry k rozvíjení žákovských poznatků jsou zaměřeny na geometrii, a to na hledání množin bodů dané vlastnosti v rovině. V těchto ilustracích jde o objevení hypotézy samotnými žáky (který geometrický útvar je hledanou množinou) a její prověření prostředky GeoGebry. Důkaz uvedených množin bodů dané vlastnosti lze nalézt například v učebnicích [2] a [3].

Ilustrace 3

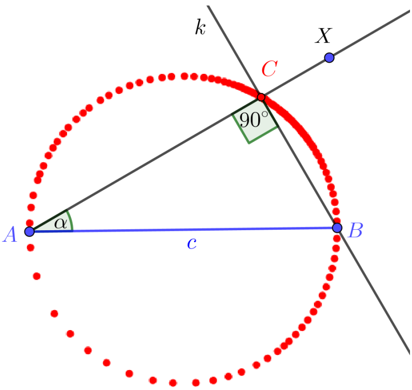
K množinám bodů dané vlastnosti, které se probírají na druhém stupni základní školy, patří Thaletova kružnice. I v tomto případě můžeme žáky dovést s pomocí GeoGebry k objevení hypotézy, že množinou všech bodů roviny, které jsou vrcholy pravých úhlů v trojúhelnících se společnou přeponou AB, je kružnice s průměrem AB bez bodů A, B.

Metodické poznámky

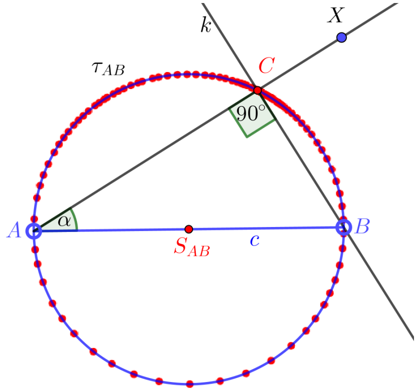
Nejdříve společně se žáky vytvoříme v GeoGebře dynamickou konstrukci, která jim umožní objevení hypotézy. Je důležité, aby žáci pochopili podstatu této konstrukce trojúhelníku; ta musí být realizována tak, aby bylo možné v konstrukci tažením některého objektu v nákresně získávat různé pravoúhlé trojúhelníky se společnou přeponou AB a pravým úhlem proti přeponě AB.

V rámci diskuze moderované učitelem by si žáci měli ujasnit, že mají sestrojit pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB, avšak známé jsou jen dva prvky trojúhelníku: strana AB, $\gamma = 90°$. Proto je potřeba zvolit třetí prvek trojúhelníku. Žáci by měli přijít na to, že zvolí-li například úhel α u vrcholu A tím, že sestrojí polopřímku AX, kde $X \notin \overleftrightarrow{AB}$, tak trojúhelník již umí sestrojit. Hledaný vrchol C leží na polopřímce AX a současně na kolmici k z bodu B k polopřímce AX. Tato konstrukce umožňuje změnou polohy bodu X (a tedy změnou velikosti úhlu α) měnit umístění polopřímky AX a získávat tak další pravoúhlé trojúhelníky nad přeponou AB. Díky tomu po zapnutí stopy bodu C žáci z vykreslované stopy rychle dospějí k hypotéze, že hledanou množinou bodů je kružnice s průměrem AB (obr. 11).

Získanou hypotézu mohou žáci prověřit tím, že do konstrukce doplní kružnici τ_{AB} s průměrem AB a ověří změnou polohy bodu X, že stopy bodu C leží na této kružnici (obr. 12). K tomu, že do nalezené množiny nepatří body A, B, je třeba žáky dovést doplňujícími otázkami; poté obvykle žáci vypozorují, že pro $C = A$, nebo $C = B$, trojúhelník ABC zanikne.



Obr. 11



Obr. 12

Ilustrace 4

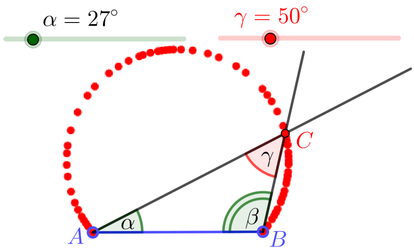
Thaletova kružnice, které byla věnována předchozí ilustrace, je speciálním případem množiny všech bodů v rovině, z nichž je daná úsečka AB vidět pod daným úhlem γ. S tímto zobecněním se žáci seznamují až na střední škole v návaznosti na učivo o obvodových a středových úhlech. Pokud žáci již znají dynamickou konstrukci množiny bodů z ilustrace 3, potom pro ně nebude obtížné vymyslet dynamickou konstrukci pro množinu bodů, z nichž je vidět úsečka pod úhlem γ.

Metodické poznámky

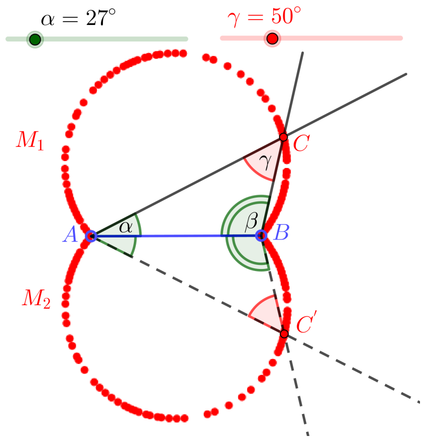
Nejdříve žákům připomeneme dynamickou konstrukci Thaletovy kružnice, ve které byl také trojúhelník zadán jen dvěma prvky (úsečkou AB a pravým úhlem u vrcholu C). Nyní potřebujeme sestrojit trojúhelník ABC, ve kterém známe stranu AB a úhel γ, $\gamma \in (0°, 180°)$. To by mělo žákům pomoci, aby si uvědomili, že je vhodné zvolit úhel α. Úhel β je tím určen jednoznačně, tj. $\beta = 180° - \gamma - \alpha$; trojúhelník ABC pak mohou žáci sestrojit podle věty *usu*.

Dynamičnost konstrukce zařídíme pomocí posuvníku pro úhel α, to umožní vykreslovat další trojúhelníky se stranou AB, které mají u vrcholu C požadovaný úhel γ. Vzhledem k tomu, že tento rys ještě využijeme ke zkoumání vlastností objevené množiny, je vhodné na začátku konstrukce také doplnit posuvník s názvem γ. Po sestrojení strany AB použijí žáci ke konstrukci ramene úhlu α nástroj *Úhel dané velikosti*, kde do pole pro velikost úhlu zadají název posuvníku α (tím se bude velikost tohoto úhlu odečítat z posuvníku α). Rameno úhlu β sestrojíme stejným způsobem, avšak do pole pro velikost úhlu β vložíme výraz $180° - \gamma - \alpha$. Vrchol C sestrojíme jako průsečík ramen úhlů α, β, na kterých neleží AB. Po zapnutí stopy bodu C se při změně hodnot α vykreslují body náležející do hledané množiny (posuvník γ je stále nastaven na zadanou velikost úhlu).

Na základě toho žáci mají příležitost zjistit, že se jedná o kružnicový oblouk (obr. 13); vzhledem k souměrnosti situace podle osy AB jde o sjednocení dvou kružnicových oblouků M_1 a M_2 bez bodů A, B (obr. 14).

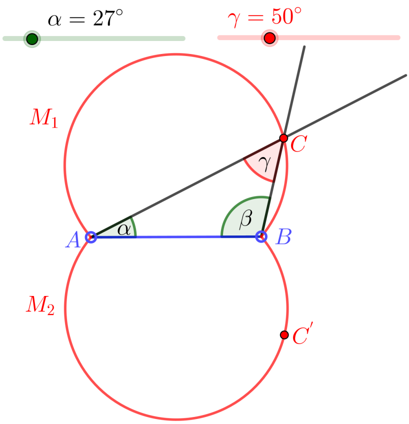


Obr. 13

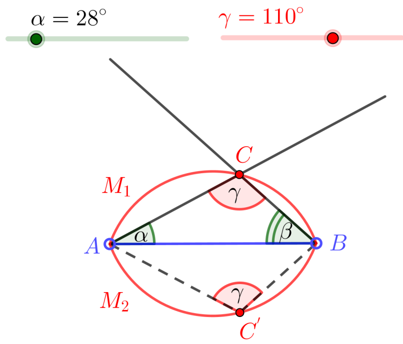


Obr. 14

Pokud využijeme nástroj GeoGebry *Množina bodů*, sestrojíme tím hledanou množinu bez využití stopy bodu C. Po aktivaci nástroje *Množina bodů* nejdříve ukazovátkem klikneme na sestrojený bod C, resp. jeho obraz C' v osové souměrnosti dle osy AB, a poté klikneme na posuvník α; tím zobrazíme hledanou množinu bodů (obr. 15). To nám umožní zkoumat vlastnosti nalezené množiny – žáky požádáme, aby po vykreslení požadované množiny bodů měnili posuvníkem jen velikost úhlu γ. Řada žáků dospěje ke zjištění, že pro ostrý úhel γ je získaný kružnicový oblouk větší než půlkružnice, pro pravý úhel jde o půlkružnici, resp. Thaletovu kružnici, a pro tupý úhel γ je získaný kružnicový oblouk menší než půlkružnice (obr. 16).



Obr. 15



Obr. 16

Uvedené ilustrace představují jen několik možností, jak může učitel využívat program GeoGebra k aktivnímu zapojení žáků v hodině při získávání poznatků. První dvě uvedené ilustrace umožňují již snadno přejít ke zkoumání řešení rovnic, resp. nerovnic či soustav dvou rovnic o dvou neznámých v závislosti na koeficientech v předpisech lineárních/kvadratických funkcí, jejichž předpisy jsou dány výrazy na levé a pravé straně rovnice, resp. nerovnice.

Literatura

[1] *Birgin, O., Uzun Yazıcı, K.*: The effect of GeoGebra software–supported mathematics instruction on eighth-grade students' conceptual understanding and retention. Journal of Computer Assisted Learning, roč. 37 (2021), s. 925–939.

[2] *Herman, J. a kol.*: Kruhy a válce – Matematika – Tercie. Prometheus, Praha, 1996.

[3] *Moravcová, V., Hromadová, J.*: Základy planimetrie pro učitelské studium. Matfyzpress, Praha, 2021.

[4] *Robová, J.*: Výzkumy vlivu některých typů moderních technologií na vědomosti a dovednosti žáků v matematice. Scientia in educatione, roč. 3 (2012), č. 2. s. 79–106.

[5] *Yohannes, A., Chen, HL*: GeoGebra in mathematics education: a systematic review of journal articles published from 2010 to 2020. Interactive Learning Environments, roč. 31 (2023), č. 9, s. 5682–5697.