MATEMATIKA

Abeceda řešení funkcionálních rovnic

PAVEL CALÁBEK – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Tento příspěvek lze považovat za volné pokračování článku [1] obou autorů, který byl zveřejněn v našem časopise v roce 2000. V tomto navazujícím příspěvku se čtenář seznámí s některými důležitými poznatky z oblasti řešení tzv. *funkcionálních rovnic*. Přestože uvedená problematika výrazně překračuje rámec vzdělávacích plánů pro výuku matematiky na střední škole, naši žáci (a potažmo i jejich učitelé) se s řešením funkcionálních rovnic setkávají stále častěji v nejrůznějších středoškolských matematických soutěží (Matematická olympiáda, Matematický klokan, matematické korespondenční semináře atd.). Ukazuje se tak, že je velmi důležité a současně prospěšné kultivovat matematické znalosti a dovednosti našich matematicky nadaných středoškoláků také v této (nadstandardní) oblasti školské matematiky. Náš článek si klade za cíl objasnit čtenářům některé postupy a metody řešení matematických úloh výše uvedeného typu. Předpokládáme pouze, že čtenář je dostatečně obeznámen s pojmem a základními vlastnostmi funkce reálné proměnné v rozsahu učebnic pro střední školy. Symbolem $\mathbb{R}$ budeme značit množinu všech reálných čísel, symbolem $\mathbb{R}^+$ množinu všech kladných reálných čísel, tj. interval $(0; +\infty)$ a symbolem $\mathbb{R}_0^+$ množinu všech nezáporných reálných čísel, tj. interval $\langle 0; +\infty)$. Platí tedy $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Připomínáme dále, že *funkcionální rovnicí* budeme rozumět takovou rovnici, kde neznámou je hledaná *funkce* s daným *definičním oborem* $D \subset \mathbb{R}$ a daným *oborem hodnot* $H \subset \mathbb{R}$. Jejím *řešením* je každá funkce, která je zobrazením D do H a současně vyhovuje dané funkcionální rovnici, viz např. [1].

Popis funkcionální rovnice

Při vlastním řešení funkcionálních rovnic je nutno důsledně respektovat zadané podminky, neboť jakákoliv (byť na první pohled velmi malá) změna např. v popisu rovnice nebo v zadání definičního oboru, popř. oboru hodnot hledané funkce, vede k překvapivým změnám v systému řešení zadané funkcionální rovnice. Následující dva příklady jsou toho důkazem.

Příklad 1

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, které pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ splňují podmínku

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Řešení. Vzhledem k tomu, že daný vztah platí pro všechna nezáporná reálná čísla x a y, musí platit speciálně i pro $y = 0$ (specifikace proměnné y). Pro všechna nezáporná reálná x tudíž platí

$$f(0) = f(x \cdot 0) = f(x) + f(0), \qquad \text{tj.} \qquad f(x) = 0.$$

Protože k nalezenému výsledku jsme dospěli na základě důsledkové úpravy[1], je potřeba provést zkoušku, která je součástí řešení úlohy. Pomocí ní se snadno přesvědčíme, že funkce $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}_0^+$ je skutečně za uvedených podmínek jediným řešením dané funkcionální rovnice.

Poznámka 1. Pokud bychom zadání úlohy pozměnili a hledali bychom funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, které vyhovují téže funkcionální rovnici (jejich definiční obor neobsahuje $x = 0$), pak množina jejích řešení obsahuje také např. každou logaritmickou funkci $f(x) = \log_a x$, kde $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, a dále celou třídu nespojitých funkcí. Lze však ukázat, že jedinými spojitými funkcemi, které této pozměněné úloze vyhovují, je konstantní nulová funkce a dále všechny výše uvedené logaritmické funkce, viz např. [3].

Z uvedeného příkladu je patrné, že malá změna v zadání definičního oboru může znamenat výrazné změny v množině řešení dané funkcionální

[1] Specifikací proměnných (tj. užitím vhodné substituce) se množina všech řešení dané funkcionální rovnice „rozšiřuje“.

rovnice. Přesněji, jakékoliv zúžení definičního oboru hledané funkce vede vždy k „rozšíření“ systému řešení dané funkcionální rovnice. Tato změna může být výrazná, jak ukazuje předešlý příklad.

Následující příklad je typickou ukázkou analogického tvrzení i pro (malou) změnu oboru hodnot dané funkcionální rovnice.

Příklad 2

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f^2(x) = 1.$$

Řešení. Snadno vidíme, že řešením této funkcionální rovnice je libovolná reálná funkce s oborem hodnot $H = \{-1; 1\}$. Např. tedy funkce $f(x) = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ nebo $f(x) = -1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, popř. funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro všechna } x \text{ racionální} \\ -1 & \text{pro všechna } x \text{ iracionální} \end{cases}$$

apod. Vidíme tedy, že daná funkcionální rovnice má nekonečně mnoho řešení.

Poznámka 2. Pokud v zadání této úlohy změníme obor hodnot hledané funkce a budeme hledat např. všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ vyhovující téže funkcionální rovnici, snadno zjistíme, že jejím jediným řešením je funkce $f(x) = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Uvedený výsledek ilustruje rovněž významnou (avšak očekávatelnou) skutečnost: Zúžení oboru hodnot hledané funkce může vést ve smyslu inkluze ke „zmenšení“ množiny řešení dané funkcionální rovnice.

V další části se zaměříme na popis dvou základních metod řešení funkcionálních rovnic. Žádná z nich však nepředstavuje univerzální prostředek jejich řešení.

Metoda specifikace proměnných (substituční metoda)

Specifikujeme-li některé proměnné, tj. dosadíme-li speciální hodnoty v argumentech proměnné dané funkcionální rovnice, „rozšíříme“ množinu možných řešení, viz řešení příkladu 1. Specifikace proměnných má charakter důsledkové úpravy a při jejím použití je proto zkouška součástí řešení. Dále pak zpravidla najdeme hodnotu funkce v některém bodě definičního oboru a pomocí ní následně určíme vlastnosti a tvar hledané funkce. Pomocí těchto kroků pak určíme další potřebné hodnoty a specifické vlastnosti hledané funkce.

Je zřejmé, že specifikovat při řešení funkcionální rovnice můžeme i několik proměnných (parametrů) současně. Funkcionální rovnice často obsahují jako proměnnou v hledané funkci výraz, který obsahuje několik pomocných proměnných (parametrů), pomocí nichž je hodnota proměnné vytvořena. Cílem specifikace proměnných je snížení jejich počtu. Uvedená metoda je přitom základem celé řady dalších metod, které lze efektivně využít při řešení funkcionálních rovnic.

Celý postup osvětlíme při řešení následujících dvou funkcionálních rovnic.

Příklad 3

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) \cdot f(y) - f(xy) = x + y.$$

Řešení. Položme nejprve $x = y = 0$. Odtud po snadné úpravě dostaneme $f(0)(f(0) - 1) = 0$. Je tedy buď $f(0) = 0$, nebo $f(0) = 1$.

Předpokládejme nejprve, že $f(0) = 0$. Substitucí $y = 0$ dostaneme na levé straně dané rovnice

$$f(x) \cdot f(0) - f(x \cdot 0) = 0,$$

kdežto na straně pravé

$$x + 0 = x,$$

což znamená, že případ $f(0) = 0$ neposkytuje žádné řešení dané funkcionální rovnice.

Nechť tedy $f(0) = 1$. Podobně i zde použijeme substituci $y = 0$ a dostaneme

$$f(x) \cdot f(0) - f(x \cdot 0) = x + 0.$$

Odtud již přímo plyne $f(x) = x + 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Závěr. Zkouškou se přesvědčíme, že nalezená funkce $f(x) = x + 1$ je jediným řešením dané funkcionální rovnice.

Příklad 4

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2.$$

Řešení. Speciální volbou (specifikací proměnných) $x = 0$ a $y = 0$ dostaneme $-2f(0) = -2$, tedy $f(0) = 1$. Tímto dosazením jsme zjistili, že pro každou funkci f, která je řešením dané funkcionální rovnice, platí $f(0) = 1$.

Opět využijeme metodu specifikace proměnných tak, že v dané funkcionální rovnici položíme $x = 0$. Dostaneme tak

$$f(y) - 2f(-y) + f(0) - 2f(y) = y - 2,$$

což po úpravě dává

$$f(y) + 2f(-y) = y - 3. \tag{1}$$

Uvedený vztah však obsahuje hledanou funkci f s dvěma různými argumenty (y a $-y$), což v tomto okamžiku nedává možnost nalezení explicitního vyjádření pro popis hledané funkce f.

Lze však postupovat následujícím způsobem (opětovné využití metody specifikace proměnných). Nechť t je libovolné reálné číslo. Protože vztah (1) platí pro všechna reálná čísla y, platí i pro $y = t$ a $y = -t$. Těmito dvěma volbami, reprezentujícími obvyklý postup, dospějeme ke vztahům

$$\begin{aligned} f(t) + 2f(-t) &= t - 3, \\ f(-t) + 2f(t) &= -t - 3. \end{aligned}$$

Na oba výše uvedené vztahy můžeme pohlížet jako na soustavu dvou lineárních rovnic s neznámými $f(t)$ a $f(-t)$. Jejím řešením dostaneme $f(t) = t + 1$ pro všechna reálná čísla t.

Provedením zkoušky

$$L = f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) =$$

$$= (x+y+1) - 2(x-y+1) + (x+1) - 2(y+1) = y - 2 = P$$

zjistíme, že $f(x) = x + 1$ (f je definovaná na $\mathbb{R}$).

ZÁVĚR. Jediným řešení dané funkcionální rovnice je funkce $f(x) = x+1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Využití symetrie proměnných

Při řešení funkcionálních rovnic lze poměrně často efektivně využít také symetrie některých dvou proměnných, a to *právě v jedné ze stran* zadané rovnice (nebo některé její části). V podobných úlohách je potřeba mnohdy předpokládat (nebo dokázat), že hledaná funkce je na daném definičním oboru *prostá*.[2]

Všimněme si, že v předešlém příkladu jsou symetrické vzhledem k oběma použitým proměnným x a y dokonce obě strany dané rovnice. Tato situace však neodpovídá (jak vzápětí uvidíme) možnosti využití následujícího postupu, který si objasníme přímo při řešení následujících dvou příkladů.

Příklad 5

Určete všechny prosté funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f\bigl(f(x) + y\bigr) = f(x + y) + 1.$$

Řešení. Snadno se vidí, že záměnou proměnných x a y, se nezmění levá strana dané rovnice (její pravá strana je *symetrická* v proměnných x a y). Vzhledem k tomu, že hledaná funkce je prostá (tj. nemůže nabývat ve dvou různých bodech svého definičního oboru téže hodnoty), musí být rovny i argumenty odpovídajících levých stran dané rovnice pro dvojice proměnných (x, y) a (y, x), platí

$$f(x) + y = f(y) + x \tag{2}$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

Pro určení funkční hodnoty v bodě $x = 0$ definičního oboru hledané funkce položme $f(0) = c$, kde $c \in \mathbb{R}$. Užitím metody specifikace proměnných, tj. použitím substituce $y = 0$ ve vztahu (2), dostaneme $f(x) = x + c$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (c je reálný parametr).

[2] Řekneme, že funkce f je na daném definičním oboru D *prostá*, právě když platí: Pokud pro určitá $x, y \in D$ je splněna rovnost $f(x) = f(y)$, pak $x = y$.

Provedením zkoušky zjistíme, že levá strana L dané funkcionální rovnice má tvar

$$L = f(f(x) + y) = f((x + c) + y) = x + y + 2c$$

a její pravá strana P je ve tvaru

$$P = f(x + y) + 1 = (x + y + c) + 1 = x + y + c + 1.$$

Porovnáním obou stran zjistíme, že $L = P$, právě když $c = 1$ (pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$).

ZÁVĚR. Jediným řešení dané funkcionální rovnice je funkce $f(x) = x+1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 6

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f\big(f(x) + f(y) + f(xy)\big) = x + f(y).$$

Řešení. Argument funkce f na levé straně dané funkcionální rovnice je symetrickým výrazem vzhledem k oběma použitým proměnným x, y. Pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ tudíž platí $x + f(y) = y + f(x)$. Využitím stejného postupu jako v předešlém příkladě dostaneme $f(x) = x + c$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Dosazením nalezené funkce do výrazů na obou stranách dané funkcionální rovnice (tj. provedením zkoušky) zjistíme, že

$$L = f\big(f(x) + f(y) + f(xy)\big) = x + y + xy + 4c$$

a

$$P = x + f(y) = x + y + c,$$

což však znamená, že neexistuje reálný parametr c takový, aby pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platilo $L = P$.

ZÁVĚR. Daná funkcionionální rovnice *nemá* řešení.

V současné době se naši středoškoláci s problematikou řešení funkcionální rovnic setkávají poměrně hojně, o čemž svědčí vysoká frekvence zařazení úloh podobného typu v finálových částech národních matematických soutěží (MO) a rovněž ve všech mezinárodních středoškolských matematických soutěží, viz např. [6].

Čtenářům, které tato problematika zaujala, lze k rozšíření jejich obzoru znalostí doporučit především publikace [2], [5], případně oficiální stránky naší MO [6]. Dále pak lze využít veškerou českou literaturu staršího data uvedenou v [1], která je zaměřena na problematiku funkcionálních rovnic.

K procvičení uvedené tematiky uvádíme pro zájemce několik dalších neřešených úloh.

Příklad 7

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x+y) + 2f(x-y) - 4f(x) + xf(y) = 3y^2 - x^2 - 2xy + xy^2.$$

[Návod: Neprve určete $f(0)$. Jediným řešením je funkce $f(x) = x^2$.]

Příklad 8

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f^2(x)f(y) = f(x-y).$$

[Úplné řešení této úlohy lze najít v publikaci [4], str. 59.]

Příklad 9

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) + y = f(f(x) + f(y)) - 1.$$

[Návod: Využijte symetrie pravé strany. Jediným řešením je $f(x) = x + 1$.]

Příklad 10

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, které pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ splňují rovnici

$$f\big(xf(y)\big) = f(xy) + x.$$

[Úplné řešení lze najít např. v [6] — 51. ročník MO, úloha A–III–6.]

Literatura

[1] *Calábek, P. – Švrček, J.*: Úvod do řešení funkcionálních rovnic. MFI, roč. 10 (2000/01), č. 3.

[2] *Engel, A.*: Problem-Solving Strategies. Springer-Verlag, New York, Inc., 1998.

[3] *Kuczma, M.*: An introduction to the theory of functional equations and inequalities (Cauchy equation and Jensen inequality). PWN, Uniwersytet Ślcaski, Warszawa–Krakow–Katowice, 1985.

[4] *Švrček, J. – Calábek, P.*: Sbírka netradičních matematických úloh. Prometheus, Praha, 2007.

[5] *Tabov, J. – Kolev, E. – Taylor, P.*: Methods of Problem Solving. Australian Mathematics Trust, 2012.

[6] http://www.math.muni.cz/mo

Číselné posloupnosti a věšení záclon

KAREL PAZOUREK

Gymnázium Třeboň

V tomto článku popíšeme zajímavou úlohu (inspirovanou reálnou situací), kterou vyřešíme využitím některých známých faktů týkajících se číselných posloupností a dále znalosti součtu několika prvních členů geometrické posloupnosti.

Zadání úlohy je následující: *Chceme pověsit záclonu tak, aby háčky, na nichž záclona visí, byly rozmístěny v pravidelných rozestupech. Kolik háčků můžeme použít?*

1. Jak věšíme záclony

Přirozený způsob věšení záclon je následující:

V prvním kroku pověsíme záclonu v obou krajních cípech (obr. 1, vlevo), potřebujeme k tomu 2 háčky. Ve druhém kroku přidáme jeden háček uprostřed (obr. 1, uprostřed), použili jsme tak celkově 3 háčky.