Číselně-teoretické úlohy v Matematickém klokanovi

VLADIMÍR VANĚK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Tento příspěvek vznikl z podnětu učitelů středních škol – čtenářů MFI, kteří projevili zájem o úplná řešení úloh z mezinárodní soutěže Matematický klokan (MK). Při přípravě sad soutěžních úloh jednotlivých kategorií jsou příklady vybírány ze čtyř oblastí – logiky, algebry, geometrie a teorie čísel. Zde jsme se zaměřili na poslední z uvedených oblastí matematiky. Předkládáme čtenářům šestici úplných řešení vybraných úloh z kategorií Junior a Student z posledních šesti let.

Neklademe si za cíl uvést všechna možná řešení prezentovaných úloh. Vybrali jsme především taková řešení, která může učitel využít ve výuce v rámci konkrétního učiva.

Na závěr je uvedeno obecnější řešení posledního problému o nalezení poslední nenulové číslice čísla $n!$ spolu s odvozením užitečného vzorce pro její rychlé určení. V rámci zachování terminologické korektnosti ještě uvádíme, že z důvodu jednoduššího vyjadřování budeme v textu chápat operace s číslicemi jako operace s hodnotami jednomístných čísel, reprezentovaných těmito číslicemi.

Příklad 1 (MK 2021, Student)

Je dáno sedmimístné číslo N s navzájem různými číslicemi, přičemž všechny dělí toto číslo. Které číslice číslo N neobsahuje?

(A) 0, 7, 9 (B) 0, 5, 7 (C) 0, 4, 5 (D) 0, 5, 9 (E) 0, 4, 8

Řešení: Je zřejmé, že číslo N neobsahuje nulu. Neobsahuje ani pětku, protože v sedmimístném čísle s různými číslicemi bude jistě obsažena některá sudá číslice. Pak by totiž N bylo dělitelné pěti a dvěma, tedy deseti a poslední číslice by byla nula, což není možné.

Součet zbývajících osmi číslic je $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 40$. Odtud vidíme, že se v N musí vyskytovat devítka. V opačném případě by zde musela být trojka, ale ciferný součet všech sedmi číslic bez devíti $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 = 31$ není dělitelný třemi, a není tedy splněno kritérium dělitelnosti třemi.

Jestliže číslo N obsahuje devítku, je i ciferný součet jeho zbývajících šesti číslic dělitelný devíti. Hledáme tedy přirozený násobek devíti menší než 31. Z možností 9, 18 a 27 vyhovuje pouze 27, neboť v ostatních případech bychom museli vynechat číslici reprezentující dvojmístné číslo. Hledaná poslední číslice, kterou číslo N nesmí obsahovat je $31 - 27 = 4$.

Závěr: Dané sedmimístné číslo nemůže obsahovat číslice 0, 4, 5.

Příklad 2 (MK 2019, Junior)

Uvažujme osm po sobě jdoucích trojmístných čísel. Každé z nich je dělitelné svou poslední číslicí. Určete ciferný součet nejmenšího z těchto osmi čísel.

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

Řešení: Hledáme nejmenší trojmístné číslo ve tvaru $\overline{abc}$. Stejně jako v předchozí úloze zřejmě platí $c \neq 0$. Odtud osm po sobě jdoucích čísel může končit (v tomto pořadí) číslicemi

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \text{ nebo } \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Platí-li $c \mid \overline{abc}$, pak $c \mid (\overline{abc} - c)$, neboli $c \mid \overline{ab0}$ pro všechna c z jedné z výše uvedených množin. Hledané číslo má být nejmenší možné, proto se zaměříme na první z nich $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Pokud má být $\overline{ab0}$ dělitelné osmi, pak je dělitelné i dvěma a čtyřmi, proto můžeme tato dvě čísla vynechat. Obdobně není třeba uvažovat ani šestku, postačí nám dělitelnost třemi. Celkem $\overline{ab0} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 840$.

Závěr: Nejmenší hledané číslo splňující podmínky zadání je tedy $\overline{abc} = 841$, jehož ciferný součet je 13.

Příklad 3 (MK 2019, Student)

Součinem šesti po sobě jdoucích čísel je dvanáctimístné číslo ve tvaru

$$N = abb\,cdd\,cdd\,abb,$$

kde a, b, c a d je opět v nějakém pořadí čtveřice po sobě jdoucích čísel. Určete hodnotu d.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Řešení: Víme, že $a, b, c, d \in \mathsf{M}$, kde $\mathsf{M} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. V každé šestici po sobě jdoucích čísel jsou jistě tři čísla sudá, dvě čísla dělitelná třemi a minimálně jedno číslo dělitelné pěti. Jejich součin je tudíž dělitelný deseti, proto má číslo N na pozici jednotek nulu ($b = 0$). Jestliže a, b, c, d

je opět v nějakém pořadí čtveřice po sobě jdoucích čísel, z nichž jedno je 0, pak je 0 prvním číslem z této čtveřice a zbývající čísla $a, c, d \in \{1, 2, 3\}$ a platí

$$a + c + d = 6.$$

Součin čísel, z nichž dvě jsou dělitelná třemi, je jistě dělitelný devíti. Navíc z tvaru čísla N je zřejmé, že jeho ciferný součet je sudý a pro $b = 0$ platí

$$2a + 2c + 4d = 9k,$$

kde k je sudé číslo ($k = 2r$). Pak

$$2a + 2c + 4d = 18r \quad \text{a} \quad a + c + d = 6,$$

odkud plyne

$$d = 9r - 6.$$

Pouze pro $r = 1$ je $d \in M$, a proto $d = 3$.

Nad rámec zadání pak z dělitelnosti čísla N osmi a faktu, že $a, c \in \{1, 2\}$, plyne $a = 2$ a $c = 1$.

Závěr: Správná odpověď je tudíž (C), tj. $d = 3$.

Příklad 4 (MK 2019, Junior)

Číslo $3a$ má právě čtyři dělitele a číslo $5a$ má právě 6 dělitelů. Určete první číslici zleva čísla $2019a$.

(A) 1 (B) 3 (C) 8 (D) 9 (E) nelze určit

Řešení: Výhodu pro řešení mají studenti, kteří se již setkali s Gaussovou větou o počtu dělitelů přirozeného čísla. V opačném případě lze pro malý počet dělitelů tvar čísla $3a$ odhadnout.

Věta 1 (Gaussova)

Má-li přirozené číslo n kanonický rozklad

$$n = {p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot {p_k}^{\alpha_k},$$

pak počet všech dělitelů čísla n je roven součinu

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1).$$

Číslo, které má právě čtyři dělitele, musí být ve tvaru $p_1 \cdot p_2$, nebo p^3, kde p_1 a p_2 jsou dvě navzájem různá prvočísla.

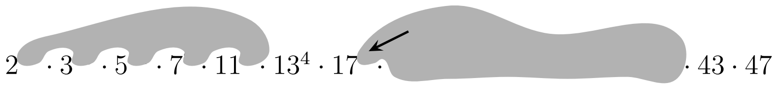
- Pro $3a = p_1 \cdot p_2$ lze bez újmy na obecnosti psát $p_1 = 3$ a $p_2 = a \neq 3$. Potom $5a = 5p_2$. Pokud ovšem $p_2 = 5$, má číslo $5a = 25$ pouze tři dělitele. Pro $p_2 \neq 5$ má číslo $5a$ čtyři dělitele. V obou případech nejsou podmínky zadání splněny.
- Pro $3a = p^3$, lze psát $p = 3$ a $p^2 = 9 = a$. Odtud $5a = 45 = 3^2 \cdot 5$ a dle výše zmíněné věty je počet dělitelů $3 \cdot 2 = 6$. Podmínky zadání jsou splněny.

Nyní již víme, že $a = 9$ a $2019 \cdot 9 = 18171$.

Závěr: První číslicí čísla $2019a$ je jednička.

Příklad 5 (MK 2024, Junior)

Číslem $n!$ rozumíme součin $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, např. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Na obrázku vidíte prvočíselný rozklad některého čísla $n!$, v němž jsou jednotlivá prvočísla uspořádána vzestupně. Bohužel jsou některá čísla nečitelná. Určete exponent prvočísla 17.



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Řešení: Z obrázku lze vyčíst dvě velmi důležité informace. Největším prvočíslem v kanonickém rozkladu je 47 a číslo 13 se zde vyskytuje právě čtyřikrát. Druhá informace nám určí minimální i maximální hodnotu čísla n.

$$52 = 4 \cdot 13 \leq n < 5 \cdot 13 = 65.$$

Další omezení čísla n plyne z první informace. Číslo n musí být ostře menší, než nejbližší prvočíslo větší než 47, tedy 53. (Pokud by bylo větší, muselo by se v kanonickém zápisu objevit.)

Obě podmínky jsou splněny pouze pro $n = 52$. Číslo, které je na obrázku zapsáno je $52!$, v jehož prvočíselném rozkladu najdeme pouze tři násobky čísla 17 (17, 34, 51).

Závěr: Exponent u prvočísla 17 je 3.

Příklad 6 (MK 2018, Student)

Archimédés správně vypočítal a napsal na tabuli číslo $15!$. Naneštěstí se mu, jak vidíte, dvě číslice rozmazaly. Které?

1■0767436■000

(A) 2 a 0 (B) 4 a 8 (C) 7 a 4 (D) 9 a 2 (E) 3 a 8

Řešení: Podívejme se nejprve na jedno z možných (žákovských) řešení. Pracné vyčíslení 15! uvažovat nebudeme.

Určíme, kolik nul má 15! za poslední nenulovou číslicí. Počet nul na posledních pozicích je určen mocninou čísla 5 v kanonickém rozkladu čísla 15!. Víme, že v kanonickém rozkladu je vždy větší počet menších prvočísel než větších. Tedy pokud se zde objevuje určitá mocnina pěti, vždy k ní najdeme alespoň stejnou mocninu dvou. Upravme 15! na tvar:

$$\begin{aligned} 15! &= 15 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = \\ &= (15 \cdot 10 \cdot 5) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot (11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14) = \\ &= (5^3 \cdot 3!) \cdot (2^3 \cdot 3) \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot (11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14) = \\ &= 10^3 \cdot 3! \cdot 3 \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot (11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14). \end{aligned}$$

Vidíme, že exponent u čísla 10 je 3, proto na konci čísla 15! budou právě tři nuly a pravá rozmazaná číslice bude první nenulová, tedy můžeme vyloučit distraktor (A). Stačí tak najít číslici na pozici jednotek čísla

$$\frac{15!}{10^3} = 3! \cdot 3 \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot (11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14).$$

Nyní nás již nezajímají číslice na jiných pozicích. Zaveďme relaci ekvivalence „$\sim$“: „mít stejnou poslední nenulovou číslici“.

Označme $C_{n!}$ poslední nenulovou číslici na pozici jednotek čísla $n!$, pak

$$\begin{aligned} C_{15!} &\sim 3! \cdot 3 \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot (11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14) \sim \\ &\sim 3! \cdot 3 \cdot (4\underline{2} \cdot 7\underline{2}) \cdot (13\underline{2} \cdot 18\underline{2}) \sim \\ &\sim 6 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \sim 6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \sim 288. \end{aligned}$$

V posledních úpravách jsme využili skutečnosti, že číslice na pozici jednotek je určena součinem posledních číslic jednotlivých činitelů. Poslední nenulovou číslicí 15! je osmička.

Ze dvou zbývajících nabízených odpovědí, můžeme navíc vyřadit (B), protože jistě $9 \mid 15!$ a jen 3 a 8 doplní uvedené číslo tak, aby jeho ciferný součet byl dělitelný 9.

Závěr: Rozmazané číslice jsou tedy v pořadí zleva doprava 3 a 8.

Podívejme se ještě na problém obecněji. Naším úkolem je najít poslední nenulovou číslici $n!$ a počet nul za ní.

V předchozí úloze jsme ukázali, že pro počet nul za poslední nenulovou číslicí čísla $n!$ je postačující znát mocninu pěti v jeho kanonickém zápisu. Pokud je n velké číslo, lze využít tzv. Legendreovy věty.

Věta 2 (Legendreova)

Nechť $v_p(n!)$ je pro libovolné prvočíslo p a přirozené číslo n nejvyšší mocninou prvočísla p, které dělí n, pak platí

$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor,$$

kde výrazem $\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$ rozumíme dolní celou část podílu $\frac{n}{p^i}$.

Např. hledáme-li exponent prvočísla 5 v kanonickém rozkladu 127!, pak

$$\begin{aligned} v_p(127!) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{127}{5^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{127}{5^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{127}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{127}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{127}{5^4} \right\rfloor + \ldots = \\ &= 25 + 3 + 1 + 0 + \ldots = 29. \end{aligned}$$

V prvočíselném rozkladu 127! je tedy 5^{29}, a proto v dekadickém zápisu čísla 127! je na konci 29 nul.

Pro nalezení posledního nenulového čísla $n!$ budeme postupovat obdobně jako v předchozí „klokanské" úloze. Nejprve zapišme všechny činitele dělitelné pěti a ostatní čísla seskupíme do čtveřic:

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = \\ &= 5 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot \left(5 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot \ldots = \\ &= 5^{\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor} \cdot \left(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot \ldots = \\ &= 5^{\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor} \cdot \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor! \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Každá závorka obsahuje součin čtyř po sobě jdoucích čísel, z nichž ani jedno není dělitelné pěti. Každou čtveřici v závorce můžeme zapsat takto:

$$(5k+1) \cdot (5k+2) \cdot (5k+3) \cdot (5k+4).$$

Algebraickými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} &(5k+1) \cdot (5k+2) \cdot (5k+3) \cdot (5k+4) = \\ &\quad = 5^4 \cdot (k^4 + k^2) + 10 \cdot (5^3k^3 + 5^2k^2 + 25k) + 2\underline{4}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Součet $k^4 + k^2 = k^2(k^2 + 1)$ jako součin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel je pro libovolné $k \in \mathbb{N}_0$ sudé číslo, proto

$$10 \mid \left[5^4 \cdot (k^4 + k^2) + 10 \cdot (5^3k^3 + 5^2k^2 + 25k)\right]$$

a součin čtyř po sobě jdoucích čísel v kterékoliv závorce končí číslicí čtyři (v textu podtržena). Je tedy dělitelný dvěma. Těchto závorek se součinem čtyř čísel je právě $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$, proto lze psát:

$$n! = 5^{\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor} \cdot \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor! \cdot 2^{\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor} \cdot \underbrace{(\text{číslo končící dvojkou}) \cdot \ldots \cdot (\text{číslo končící dvojkou})}_{\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\text{-krát}} \cdot m.$$

Číslo m je rovno součinu čísel, které nenáleží žádné čtveřici v závorce. V tomto součinu je počet činitelů roven zbytku po dělení čísla n pěti.

Hledaná poslední nenulová číslice $n!$ je tedy stejná, jako poslední číslice čísla

$$\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor! \cdot (\text{číslo končící dvojkou}) \cdot \ldots \cdot (\text{číslo končící dvojkou}) \cdot m$$

a v souladu s výše uvedeným značením můžeme psát

$$C_{n!} \sim \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor! \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\text{-krát}} \cdot m = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor! \cdot 2^{\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor} \cdot m. \tag{2}$$

Zbývá určit poslední číslici čísla m, které může nabývat pěti možných tvarů.

1. $m = 5k + 1$ pro $n \equiv 1 \pmod 5$
2. $m = (5k + 1) \cdot (5k + 2)$ pro $n \equiv 2 \pmod 5$
3. $m = (5k + 1) \cdot (5k + 2) \cdot (5k + 3)$ pro $n \equiv 3 \pmod 5$

Zbývající dva případy nemusíme uvažovat, neboť pokud $n \equiv 4 \pmod 5$, nebo $5 \mid n$, pak po úpravě rovnice (1), budou všichni činitele součástí některé čtveřice, proto $m = 1$.

V první případě je m jedno číslo ve tvaru $5k + 1$ a navíc $m = n$. Pro libovolné $k \in \mathbb{N}_0$ je poslední číslicí čísla m jednička (ta ale v součinu hodnotu poslední číslice neovlivní), nebo šestka.

V druhém případě je m součinem dvou čísel tvaru $(5k + 1) \cdot (5k + 2)$ a můžeme psát

$$m = (5k + 1) \cdot (5k + 2) = 5k(5k + 3) + 2.$$

- Je-li k sudé, pak $k = 2l$ a $m = 10l(10l + 3) + 2$.
- Je-li k liché, pak $k = 2l + 1$ a $m = 10(2l + 1)(5l + 4) + 2$.

Pro libovolné k je tedy číslicí na pozici jednotek dvojka.

Ve třetím případě je m součinem tří čísel $(5k + 1) \cdot (5k + 2) \cdot (5k + 3)$ a můžeme psát

$$m = (5k + 1) \cdot (5k + 2) \cdot (5k + 3) = 5(25k^3 + 11k) + 150k^2 + 6.$$

Výraz $(25k^3 + 11k)$ je sudý pro libovolné $k \in \mathbb{N}_0$, a proto je vždy poslední číslicí šestka.

Z výše uvedeného vyplývá, že číslo m může mít na pozici jednotek pouze 1, 2, nebo 6. Pro zjednodušení výsledného vztahu pro výpočet poslední nenulové číslice a vzhledem k předchozím řádkům si uvědomme:

- Pokud je n číslo ve tvaru $n = 5k + 3$, je poslední číslice čísla m šestka, a platí $6 = 3!$.
- Pokud je n číslo ve tvaru $n = 5k + 2$, je poslední číslice čísla m dvojka, a platí $2 = 2!$.
- Pokud je n číslo ve tvaru $n = 5k + 1$, pak platí $n = m$, a poslední číslice čísla m je jednička pro sudá k, neboli $1 = 1!$ (ta poslední číslici neovlivní), nebo šestka pro lichá $k \geq 1$. V tomto okamžiku je nutné si uvědomit, že pokud násobíme šesti libovolné sudé číslo c, má výsledek na pozici jednotek stejnou číslici jako c. V takovém případě se tedy chová šestka jako jednička. Tohoto faktu můžeme využít, protože ve výrazu (2) se pro $n \geq 6$ v součinu vždy objeví sudý činitel. V opačném případě je $n = m = 1$.

Lze tedy obecně psát

$$C_{n!} \sim \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor ! \cdot 2^{\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor} \cdot r!, \quad \text{kde } r \text{ je zbytek po dělení } n \text{ číslem } 5.$$

Můžeme proto vyslovit následující větu.

Věta 3

Nechť n je libovolné přirozené číslo, pak pro poslední nenulovou číslici $C_{n!}$ čísla $n!$ platí

$$C_{n!} \sim \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor ! \cdot 2^{\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor} \cdot r!,$$

kde r je zbytek po dělení n číslem 5.

Ukážeme si to na konkrétním příkladě. Hledáme-li např. poslední nenulovou číslici 127!, pak podle předchozí věty platí

$$C_{127!} \sim \left\lfloor \frac{127}{5} \right\rfloor ! \cdot 2^{\left\lfloor \frac{127}{5} \right\rfloor} \cdot 2! \sim 25! \cdot 2^{25} \cdot 2!.$$

Pro nalezení poslední nenulové číslice 25! opět využijeme odvozený vztah:

$$C_{25!} = 5! \cdot 2^5 \cdot 0!.$$

Dosazením dostáváme

$$\begin{aligned} C_{127!} &\sim 5! \cdot 2^5 \cdot 0! \cdot 2^{25} \cdot 2! \sim \\ &\sim 120 \cdot 2^{31} \sim 2 \cdot (2^4)^7 \cdot 2^3 \sim 2 \cdot 6^7 \cdot 8 \sim \\ &\sim 2 \cdot 6 \cdot 8 \sim 96 \sim 6. \end{aligned}$$

Ve druhé úpravě jsme využili ekvivalenci $C_{120} \sim C_2$, ve třetí úpravě ekvivalenci $C_{2^4} \sim C_6$ a ve čtvrté úpravě poznatku, že libovolná přirozená mocnina šesti má poslední číslici 6.

Závěr: Poslední nenulová číslice čísla 127! je 6.

Literatura

[1] *Nocar, D., Vaněk, V.*: Matematický klokan pro žáky základních škol I. MFI, roč. 31 (2022), č. 3, s. 178–188.

[2] *Matematický klokan* [online]. Olomouc, 2022 [cit. 22.4.2024]. Dostupné z: http://www.matematickyklokan.net/

[3] *Mazumdar, T., Sehgal, R., Ben, A., Khim, J.*: Rightmost Non-zero Digit of n! [online]. San Francisco, 2024 [cit. 1.4.2024]. Dostupné z: https://brilliant.org/wiki/rightmost-non-zero-digit-of-n/

[4] *Švrček, J., Calábek, P., Vaněk, V.*: Péče o matematické talenty v České republice. Vydavatelství UP, Olomouc, 2008.

[5] *Vaněk, V., Calábek, V., Nocar, D.*: České stopy v Matematickém klokanovi. MFI, roč. 27 (2018), č. 5, s. 334–346.