Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 12. 2024 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi zveřejníme.

Úloha 295

Nechť D je bod strany BC rovnostranného trojúhelníku ABC, kde $|BD| = 2|CD|$. Označme E patu kolmice z vrcholu B k přímce AD a F ($F \neq A$) průsečík přímky AD s kružnicí opsanou uvažovanému trojúhelníku. Dokažte, že trojúhelníky BDE a CDF mají stejné obsahy.

Józef Kalinowski (Polsko)

Úloha 296

Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$V = \max\{3a + b, 8a^2\} + \max\{3b + a, 8b^2\},$$

kde a, b jsou reálná čísla, jejichž součet je roven 1.

Jaroslav Švrček

Dále uvádíme řešení úloh 291 a 292, jejichž zadání jsme zveřejnili v prvním čísle letošního (33.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 291

Pro trojmístné číslo uvažujme tři součiny všech dvojic číslic tohoto čísla. Určete počet trojmístných čísel, v nichž je aspoň jeden uvedený součin roven aritmetickému průměru zbylých dvou součinů.

Jaroslav Zhouf

Řešení. Označme a, b, c číslice hledaného čísla a předpokládejme, že platí $a \leq b \leq c$. Jelikož jsou to číslice trojmístného čísla, alespoň jedna z nich je nenulová, tedy $c > 0$. Dále platí $ab \leq ac \leq bc$. Jelikož aritmetický průměr dvou čísel leží mezi nimi, hledáme takové číslice, pro něž platí

$$ac = \frac{ab + bc}{2}.$$

Tuto rovnici upravíme do tvaru

$$(2c - b)(2a - b) = b^2, \tag{1}$$

přitom b považujeme za parametr. Vzhledem k tomu, že $2c - b \geq c > 0$ a $b^2 \geq 0$ platí $2a - b \geq 0$, přitom oba činitele $2c - b$ a $2a - b$ jsou celá čísla a platí $2c - b \geq 2a - b$.

Pro $b = 0$ dostáváme $ac = 0$, což vzhledem k podmínce $c > 0$ znamená $a = 0$ a c je libovolná nenulová číslice. Z těchto tří číslic lze sestavit právě devět vyhovujících trojmístných čísel $\overline{c00}$.

Pro $b \neq 0$ rovnici (1) řeší čísla $2c - b = 2a - b = b$, tedy $a = b = c$, ze kterých lze sestavit 9 vyhovujících čísel $\overline{bbb}$.

Dále hledejme řešení rovnice (1), pro která je $2c - b > 2a - b$, tedy $c > b > a$, odkud $b < 9$. Pro zbývající liché číslice b má číslo b^2 jediný rozklad na dva různé činitele, a to $2c - b = b^2$ a $2a - b = 1$. Protože c je číslice, platí $b + b^2 = 2c \leq 18$, odkud plyne $b < 4$.

- Pro $b = 1$ dostáváme $(2c - 1)(2a - 1) = 1$. Oba činitele jsou přirozená čísla, musí být rovny jedné, což je ve sporu s $c > a$.
- Pro $b = 3$ dostáváme $(2c - 3)(2a - 3) = 9$. Pro $c > a$ to znamená $2c - 3 = 9$ a $2a - 3 = 1$, tedy $(a, b, c) = (2, 3, 6)$. Z těchto tří různých (nenulových) číslic lze sestavit 6 vyhovujících trojmístných čísel.

Pro sudé číslice $b > 0$ rovnici (1) upravíme na tvar

$$\left(c - \tfrac{1}{2}b\right)\left(a - \tfrac{1}{2}b\right) = \tfrac{1}{4}b^2,$$

s činiteli $c - \frac{1}{2}b$, $a - \frac{1}{2}b$, které jsou opět celými čísly.

- Pro $b = 2$ to znamená $(c - 1)(a - 1) = 1$, tedy $c - 1 = a - 1 = 1$, ale to je spor s podmínkou $c > a$.
- Pro $b = 4$ to znamená $(c - 2)(a - 2) = 4$. Pro $c > a$ nutně $c - 2 = 4$ a $a - 2 = 1$, tedy $(a, b, c) = (3, 4, 6)$. Z těchto tří různých nenulových číslic lze sestavit 6 vyhovujících trojmístných čísel.
- Pro $b = 6$ to znamená $(c - 3)(a - 3) = 9$. Pro $c > a$ nutně $c - 3 = 9$ a $a - 3 = 1$, ovšem první rovnost nemůže platit pro žádnou číslici c.
- Pro $b = 8$ to znamená $(c - 4)(a - 4) = 16$. Pro $c > a$ nutně $c - 4 \geq 8$, tato nerovnost nemůže platit pro žádnou číslici c.

Závěr. Úloze vyhovuje celkem $9 + 9 + 6 + 6 = 30$ trojmístných čísel.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Tomáš Dejmek*, G Kolín, *Jana Fišerová* a *Nikola Hrabal*, oba G Olomouc-

Hejčín, *Mikuláš Hořenek*, WG Ostrava, *Tereza Kubínová*, G Praha 9, Litoměřická, *Václav Kučera*, SChŠ, ZŠ a G, Cheb, *Lukáš Nohejl*, GLJ, Holešov, *Jan Paloncý*, G Šumperk, *Mikoláš Palouda*, G Český Krumlov, *Jiří Preč*, GJAK Uherský Brod, *David Schmidt*, GUB Jablonec nad Nisou, *Petr Starý*, G České Budějovice, Jírovcova, *Piotr Szatan*, II LO v Tarnovských Horách (Polsko), *Jan Pavel Škoda*, OG G a ZŠ Babice, *Jakub Toupal*, G Plzeň, Mikulášské nám., *Adam Vášek*, GJB Beroun, *Martin Vořechovský*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše a *Petr Zaoral*, G Teplice.

Neúplná řešení zaslali *Martin Bryja*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše a *Petr Karlík*, G Praha 10, Voděradská.

Úloha 292

Určete všechny dvojice (x, y) reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \cos(x-y),\\ \cos(x+y) &= \sin(x-y).\end{aligned}$$

Jaroslav Švrček

Řešení. Při řešení této soustavy užijeme následující součtovou formuli: Pro libovolná reálná čísla α a β platí

$$\begin{aligned}&\sin\alpha - \cos\beta =\\ &= \sin\alpha - \sin(\beta + \tfrac{1}{2}\pi) = 2\sin\frac{\alpha - (\beta + \frac{1}{2}\pi)}{2}\cos\frac{\alpha + (\beta + \frac{1}{2}\pi)}{2} =\\ &= 2\sin\bigl(\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) - \tfrac{1}{4}\pi\bigr)\cos\bigl(\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{4}\pi\bigr).\end{aligned}$$

První rovnici upravíme do tvaru

$$0 = \sin(x+y) - \cos(x-y) = 2\sin(y - \tfrac{1}{4}\pi)\cos(x + \tfrac{1}{4}\pi),$$

zatímco druhou

$$\begin{aligned}0 &= \sin(x-y) - \cos(x+y) =\\ &= 2\sin(-y - \tfrac{1}{4}\pi)\cos(x + \tfrac{1}{4}\pi) = -2\sin(y + \tfrac{1}{4}\pi)\cos(x + \tfrac{1}{4}\pi).\end{aligned}$$

Odtud plyne, že:

a) buď $\cos(x + \frac{1}{4}\pi) = 0$, tedy $x + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ pro libovolné celé číslo k a dvojice

$$(x, y) = (\tfrac{1}{4}\pi + k\pi, y)$$

je řešením dané soustavy pro libovolné celé číslo k a libovolné reálné číslo y,

b) nebo současně $\sin(y-\frac{1}{4}\pi)=0$ a $\sin(y+\frac{1}{4}\pi)=0$. Z první rovnice existuje celé číslo l tak, že $y-\frac{1}{4}\pi=l\pi$, tedy $y=l\pi+\frac{1}{4}\pi$. Dosazením do druhé rovnice ovšem dostaneme

$$\sin(y+\tfrac{1}{4}\pi)=\sin(l\pi+\tfrac{1}{2}\pi)=\cos l\pi=(-1)^l\neq 0.$$

V tomto případě neexistuje žádné reálné řešení.

Závěr. Řešeními dané soustavy rovnic jsou všechny dvojice reálných čísel

$$(x,y)=(\tfrac{1}{4}\pi+k\pi,y),$$

kde k je libovolné celé číslo a y libovolné reálné číslo.

Poznámka. Všechny úpravy byly ekvivalentní, zkouška tak není nezbytnou součástí řešení.

Správná řešení zaslali *František Jáchim* z Volyně, *Martin Bryja*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Tomáš Dejmek*, G Kolín, *Jana Fišerová* a *Nikola Hrabal*, oba G Olomouc-Hejčín, *Petr Karlík*, G Praha 10, Voděradská. *Tereza Kubínová*, G Praha 9, Litoměřická, *Lukáš Nohejl*, GLJ, Holešov, *Jan Paloncý*, G Šumperk, *Mikoláš Palouda*, G Český Krumlov, *Jiří Preč*, GJAK Uherský Brod, *Michal Roček*, SPŠ a VOŠ Liberec, *Petr Starý*, G České Budějovice, Jírovcova, *Piotr Szatan*, II LO v Tarnovských Horách (Polsko), *Jan Pavel Škoda*, OG G a ZŠ Babice, *Adam Vášek*, GJB Beroun a *Petr Zaoral*, G Teplice.

Neúplné řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy.

Pavel Calábek