ZPRÁVY

12. ročník CPSJ

Ve dnech 19. až 22. května 2024 se v Karlově pod Pradědem konal již 12. ročník Česko-polsko-slovenské matematické soutěže juniorů (CPSJ). Vznik této soutěže iniciovali polští kolegové, kteří chtěli vítěze své Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów (OMG) nechat nasát atmosféru mezinárodní matematické soutěže.[3)]

Český reprezentační výběr byl sestaven na základě výsledků krajských kol kategorií A a C 73. ročníku Matematické olympiády a dále následného výběrového soustředění z žáků, kteří navštěvují nejvýše první ročník středních škol (kvinty osmiletých gymnázií). Účast v reprezentaci si vybojovali: *Martin Bryja* (5/8), *Jakub Hladký* (5/8), *Arne Štoudek* (4/8) a *Petr Vokřínek* (4/8), všichni Gymnázium Brno, tř. Kapitána Jaroše, *Lukáš Komín* (5/8), Gymnázium Opatov, Praha 4 a *Jakub Trčka* (1/4), Gymnázium Jana Keplera, Praha 6. Vedoucím české delegace byli *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.* a *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.,* oba z PřF UP v Olomouci.

Všichni účastníci se sešli v neděli 19. 5. na hotelu Karlov v Karlově pod Pradědem. V pondělí na ně čekala soutěž jednotlivců, po dobu 3,5 hodiny řešili 5 příkladů. Zadání příkladů obdrželi soutěžící jak v mateřském jazyce, tak i v angličtině, řešení mohli odevzdávat ve svém mateřském jazyce. Po odpočinkovém programu a prezentaci svých řešení byli navečer soutěžící rozlosováni do šesti tříčlenných družstev, v každém bylo po jednom českém, polském a slovenském účastníkovi.

Druhý den tyto týmy řešily po dobu pěti hodin úlohy soutěže družstev, kdy dostaly sadu šesti příkladů, po dvou v češtině, polštině a slovenštině a řešení těchto příkladů měli žáci odevzdat v jiném jazyce, přičemž vznikly všechny kombinace různých jazyků. Soutěžící si tak vyzkoušeli týmovou komunikaci, kdy zbývajícím členům svých družstev měli objasnit zadání a poté i svá řešení.

Výsledky soutěže jednotlivců, i soutěže družstev můžete najít na stránkách Matematické olympiády. Vzorová řešení úloh (v polštině) soutěže jednotlivců i družstev najdete na stránkách polské matematické olympiády (OM).

[3)] Na vysvětlenou – v Česku a na Slovensku existuje jedna matematická olympiáda, kterou řeší žáci v pěti věkových kategoriích na základních školách (a nižších ročních osmiletých gymnázií) a ve třech kategoriích na středních školách, přitom celostátním kolem končí pouze nejvyšší kategorie A, ostatní končí krajským či okresním kolem. V Polsku dlouhou dobu existovala matematická olympiáda, která se řešila v jedné kategorii, určená převážně žákům jejich středních škol (bývalá tříletá polská licea). Pro žáky druhého stupně základních škol (bývalá čtyřletá gymnázia) později vznikla jiná matematická soutěž, OMG, opět řešená v jedné kategorii a ukončená celostátním (čtvrtým) kolem. Po proběhlé školské reformě (licea nyní čtyřletá a gymnázia se spojila se základními školami) byla tato soutěž přejmenována na Olimpiada Matematyczna Juniorów.

Na závěr uvádíme zadání všech soutěžních úloh.

Soutěž jednotlivců
(20. 5. 2024)

1. Na počátku jsou na tabuli napsána čísla 1 a 2. V jednom kroku vybereme kladné reálné číslo x a dvojici čísel (a,b) napsaných na tabuli nahradíme dvojicí

$$\left(a+\frac{x}{b}, b+\frac{x}{a}\right).$$

Může (po konečném počtu kroků) nastat situace, že na tabuli budou napsána čísla 2 a 3?

(Polsko, *Łukasz Bożyk*)

2. Pro kolik (neprázdných) podmnožin množiny $\{1,2,3,4,\dots,11\}$ je součin jejich prvků třetí mocninou přirozeného čísla? (Česko, *Tomáš Bárta*)

3. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|AB| = |BD| = |DC|$ a $AB \perp BD \perp DC$. Označme M střed jeho strany BC. Dokažte, že platí

$$|\sphericalangle BAM| + |\sphericalangle DCA| = 45^\circ.$$

(Česko, *Jaroslav Švrček*)

4. Pro celá čísla a, b, c platí $a+b+c=1$ a $ab+bc+ca<abc$. Dokažte, že

$$ab+bc+ca<2abc.$$

(Polsko, *Konrad Majewski*)

5. Pro přirozené číslo n označme $S(n)$ součet číslic jeho desítkového zápisu. Najděte nejmenší přirozené číslo n splňující $4S(n) = 3S(2n)$.

(Slovensko, *Eliška Macáková*)

Soutěž družstev
(21. 5. 2024)

1. Označme G těžiště trojúhelníku ABC. Nechť D je čtvrtý vrchol rovnoběžníku $AGDB$. Dokažte, že $BG \parallel CD$. (Slovensko, *Patrik Bak*)

2. Mezi trojicemi (a,b,c) přirozených čísel splňujících

$$\left(a+14\sqrt{3}\right)\left(b-14c\sqrt{3}\right) = 2024$$

určete tu s největší hodnotou a.

(Slovensko, *Mária Dományová*)

3. Wyznacz miary kątów wewnętrznych we wszystkich trójkątach równoramiennych, które można podzielić na dwa trójkąty równoramienne o rozłącznych wnętrzach.

(Česko, *Jaroslav Švrček*)

4. Ile jest dodatnich liczb całkowitych n mniejszych od 2024 i podzielnych przez $\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1$? Symbol $\lfloor x\rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.

Na przykład $n = 8$ spełnia dany warunek, gdyż 8 jest podzielne przez $\lfloor\sqrt{8}\rfloor - 1 = 2-1 = 1$, ale $n = 9$ go nie spełnia, gdyż 9 nie jest podzielne przez $\lfloor\sqrt{9}\rfloor - 1 = 2$.

(Slovensko, *Patrik Bak*)

5. Existuje celé číslo $n \geq 1$ také, že keď cifry čísla 2^n, zapísaného v desiatkovej sústave, napíšeme v opačnom poradí, dostaneme *inú* celočíselnú mocninu dvojky?

(Polsko, *Tomasz Przybyłowski*)

6. V každom políčku obdĺžnikovej tabuľky je kladné celé číslo. Pre každé políčko tabuľky platí, že číslo v ňom je rovné celkovému počtu rôznych hodnôt v políčkach, ktoré sú s ním v rovnakom riadku alebo stĺpci (vrátane seba samého). Nájdite všetky tabuľky s takouto vlastnosťou.

(Polsko, *Łukasz Bożyk*)

Příští, třináctý ročník soutěže se uskuteční v květnu 2025 v Polsku.

Pavel Calábek