Literatura

[1] *Calábek, P. – Švrček, J.*: Úvod do řešení funkcionálních rovnic. MFI, roč. 10 (2000/01), č. 3.

[2] *Engel, A.*: Problem-Solving Strategies. Springer-Verlag, New York, Inc., 1998.

[3] *Kuczma, M.*: An introduction to the theory of functional equations and inequalities (Cauchy equation and Jensen inequality). PWN, Uniwersytet Ślcaski, Warszawa–Krakow–Katowice, 1985.

[4] *Švrček, J. – Calábek, P.*: Sbírka netradičních matematických úloh. Prometheus, Praha, 2007.

[5] *Tabov, J. – Kolev, E. – Taylor, P.*: Methods of Problem Solving. Australian Mathematics Trust, 2012.

[6] http://www.math.muni.cz/mo

Číselné posloupnosti a věšení záclon

KAREL PAZOUREK

Gymnázium Třeboň

V tomto článku popíšeme zajímavou úlohu (inspirovanou reálnou situací), kterou vyřešíme využitím některých známých faktů týkajících se číselných posloupností a dále znalosti součtu několika prvních členů geometrické posloupnosti.

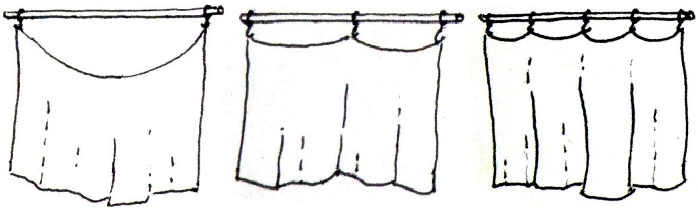
Zadání úlohy je následující: *Chceme pověsit záclonu tak, aby háčky, na nichž záclona visí, byly rozmístěny v pravidelných rozestupech. Kolik háčků můžeme použít?*

1. Jak věšíme záclony

Přirozený způsob věšení záclon je následující:

V prvním kroku pověsíme záclonu v obou krajních cípech (obr. 1, vlevo), potřebujeme k tomu 2 háčky. Ve druhém kroku přidáme jeden háček uprostřed (obr. 1, uprostřed), použili jsme tak celkově 3 háčky.

V dalších krocích vždy každý oblouk záclony přidáním jednoho háčku rozpůlíme, dostaneme tak z každého oblouku vždy dva shodné menší oblouky. Kolik háčků je potřeba?



Obr. 1

Označme h_n počet háčků použitých v n-tém kroku. Každý oblouk záclony má vždy jeden háček vlevo, navíc jeden háček musíme započítat za pravý krajní cíp záclony. Počet „levých" háčků uvažovaných oblouků se v každém kroku zdvojnásobí. Jestliže v n-tém kroku bylo použitých „levých" háčků $h_n - 1$, v $(n+1)$-ním kroku jich bude $2(h_n - 1) = 2h_n - 2$. Pro počet háčků h_{n+1} použitých v $(n+1)$-ním kroku tak dostáváme rekurentní vztah

$$h_{n+1} = (2h_n - 2) + 1 = 2h_n - 1. \tag{1}$$

Posloupnost $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ je tedy definována rekurentně vztahy

$$h_1 = 2, \quad h_{n+1} = 2h_n - 1 \text{ pro každé } n \text{ přirozené.}$$

Prvních devět členů této posloupnosti je uvedeno v následující tabulce:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h_k	2	3	5	9	17	33	65	129	257

2. Odvození vzorce pro n-tý člen pomocí rekurentního vztahu

Vypišme si vztahy pro členy $h_n, h_{n-1}, h_{n-2}, \ldots, h_3, h_2$ a h_1 uvažované posloupnosti

$$\begin{aligned} h_n &= 2h_{n-1} - 1, \\ h_{n-1} &= 2h_{n-2} - 1, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h_{n-2} &= 2h_{n-3} - 1,\\
&\vdots\\
h_3 &= 2h_2 - 1,\\
h_2 &= 2h_1 - 1,\\
h_1 &= 2.
\end{aligned}
$$

Sečtením výše uvedených rovností dostaneme

$$
h_n + h_{n-1} + h_{n-2} + \ldots + h_3 + h_2 + h_1 =
$$

$$
= 2\,(h_{n-1} + h_{n-2} + h_{n-3} + \ldots + h_2 + h_1) + 2 - (n-1),
$$

tedy

$$
h_n + \sum_{k=1}^{n-1} h_k = 2\sum_{k=1}^{n-1} h_k - n + 3,
$$

a po snadné úpravě pak

$$
h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k - n + 3. \tag{2}
$$

Ke stanovení hodnoty h_n lze však použít také následující postup: Druhou rovnost uvažovaného systému výše uvedených rovností vynásobíme číslem 2, třetí 2^2, čtvrtou 2^3, atd., až předposlední rovnost vynásobíme 2^{n-2} a poslední z nich číslem 2^{n-1}. Dostaneme tak

$$
\begin{aligned}
h_n &= 2h_{n-1} - 1,\\
2\cdot h_{n-1} &= 2^2\cdot h_{n-2} - 2,\\
2^2\cdot h_{n-2} &= 2^3\cdot h_{n-3} - 2^2,\\
&\vdots\\
2^{n-3}\cdot h_3 &= 2^{n-2}\cdot h_2 - 2^{n-3},\\
2^{n-2}\cdot h_2 &= 2^{n-1}\cdot h_1 - 2^{n-2},\\
2^{n-1}\cdot h_1 &= 2^n.
\end{aligned}
$$

Sečtením všech těchto rovností dostaneme po snadné úpravě

$$
h_n = 2^n - (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-3} + 2^{n-2}). \tag{3}
$$

Výraz v závorce na pravé straně ve vztahu (3) představuje součet $n-1$ členů geometrické posloupnosti s kvocientem 2 a prvním členem 1. Užitím známého vzorce pro součet prvních $n-1$ členů geometrické posloupnosti tak obdržíme

$$h_n = 2^n - \frac{2^{n-1}-1}{2-1} = 2^n - 2^{n-1} + 1 = 2^{n-1} + 1.$$

Explicitní vyjádření (předpis) pro n-tý člen zkoumané číselné posloupnosti $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ je tedy $h_n = 2^{n-1} + 1$.

3. Přímý výpočet vzorce pro n-tý člen

V této části odvodíme formuli pro počet háčků v n-tém kroku přímým výpočtem, tj. bez použití rekurentního vztahu. Zaměřme se na počet oblouků, které tvoří záclona mezi dvěma sousedními háčky v jednotlivých krocích. V prvním kroku je oblouk jediný, v dalších krocích se jejich počet vždy zvojnásobuje. Jedná se tedy o posloupnost $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16, \ldots$, která je tvořena mocninami dvojky. Její n-tý člen je tedy 2^{n-1}. Přitom v každém kroku je počet háčků o 1 větší než počet oblouků. Tudíž počet háčků v n-tém kroku je

$$h_n = 2^{n-1} + 1.$$

Tento postup je výrazně kratší a současně technicky méně náročný. Zjednodušení spočívá v přechodu k výpočtu (vyjádření) kvalitativně jiné hodnoty, jež je s hledaným počtem h_n spjata jednoduchým vztahem. Dokázali jsme tak dvěma odlišnými způsoby následující tvrzení.

Věta

Pro libovolné přirozené číslo n platí: Počet h_n použitých háčků při věšení záclony popsaným (běžným) způsobem v n-tém kroku je dán vztahem

$$h_n = 2^{n-1} + 1, \tag{4}$$

4. Užití principu matematické indukce

Tvrzení předešlé věty lze dokázat také užitím principu matematické indukce vzhledem k n.

(i) Pro $n = 1$ dané tvrzení platí, neboť evidentně $h_1 = 2 = 2^{1-1} + 1$.

(ii) Předpokládejme, že dané tvrzení platí pro určité $n = k$ přirozené, kde $k \geq 1$. Ukážeme, že platí i pro $n = k+1$. Předpokládejme, že hledaný počet háčků v k-tém kroku je $h_k = 2^{k-1} + 1$. Vzhledem k tomu, že se v každém kroku počet háčků zdvojnásobí a současně se tato hodnota zmenší o 1 (jedná se v podstatě o využití rekurentního vztahu (1)), platí pro počet háčků v $(k+1)$-tém kroku

$$h_{k+1} = 2h_k - 1 = 2\left(2^{k-1} + 1\right) - 1 = 2^k + 1.$$

Tím jsme ověřili, že uvedený vztah platí i pro $n = k+1$.

Současným využitím kroků (i) a (ii) jsme tak dokázali (užitím principu matematické indukce) platnost vztahu (4).

5. Výpočet součtu $\sum_{k=1}^{n} h_k$

Ze vztahu (2) bezprostředně plyne

$$\sum_{k=1}^{n-1} h_k = h_n + n - 3 = (2^{n-1} + 1) + n - 3 = 2^{n-1} + n - 2\,.$$

Ke stejnému výsledku dospějeme i bez použití vztahu (2). Postačí nám k tomu znalost odvozeného vzorce pro n-tý člen posloupnosti $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ a dále znalost součtu několika prvních členů geometrické posloupnosti. Platí tak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} h_k &= h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_{n-1} = \\
&= (2^0 + 1) + (2^1 + 1) + (2^2 + 1) + \ldots + (2^{n-2} + 1) = \\
&= (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-2}) + n - 1 = \\
&= \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} + n - 1 = 2^{n-1} + n - 2.
\end{aligned}$$

Chceme-li stanovit součet prvních n členů posloupnosti $(h_n)_{n=1}^{\infty}$, přejdeme v odvozené rovnosti od $n-1$ k n. Dostaneme tak přímo formuli pro součet prvních n členů uvažované posloupnosti, kde

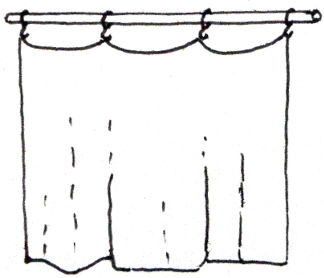
$$\sum_{k=1}^{n} h_k = 2^n + n - 1.$$

Na závěr uvádíme pro zájemce následující úlohu, která je zobecněním úlohy vyřešené v tomto příspěvku. Vyjděme ze situace, kdy záclona je už v prvním kroku zavěšena na několika háčcích, z nichž každé dva sousední jsou od sebe stejně vzdáleny.

Příklad

Najděte rekurentní zadání a vzorec pro n-tý člen posloupnosti $(h'_n)_{n=1}^{\infty}$ počtu háčků, jestliže

a) $h'_1 = 4$ (viz obr. 2),



Obr. 2

b) $h'_1 = p$, kde p je libovolné přirozené číslo.

Ověřte dále, že pokud za p zvolíme tzv. *Fermatovo číslo*, tj. přirozené číslo tvaru $2^{2^n} + 1$, viz např.[1], obdržíme podposloupnost zkoumané posloupnosti $(h_n)_{n=1}^{\infty}$.

Literatura

[1] *Křížek, M. – Somer, L. – Šolcová, A.*: Kouzlo čísel (2. upravené vydání). Academia, Praha, 2011.